SÉRIE : B

N° d'Ordre : 125

N° de Série : 72

THESE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Michel JAVELOT

LA SIMULATION DU MILIEU ENVIRONNANT DANS L'ÉVALUATION DES SYSTEMES PHYSIQUES LIÉS AU SOL.

soutenue le 30 janvier 1971 devant la Commission d'Examen

MM. MEVEL Président

BOCLÉ
DUBOST
ARQUES
} Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552709_0037

SÉRIE : B

N° d'Ordre : 125

N° de Série : 72

THESE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Michel JAVELOT

LA SIMULATION DU MILIEU ENVIRONNANT DANS L'ÉVALUATION

DES SYSTEMES PHYSIQUES LIÉS AU SOL.

soutenue le 30 janvier 1971 devant la Commission d'Examen

MM. MEVEL Président

BOCLÉ
DUBOST
ARQUES
} Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

– *Je prie Monsieur le Professeur* **MEVEL** *de bien vouloir trouver ici l'expression de mes plus sincères et plus vifs remerciements pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.*

– *Que Monsieur le Professeur* **BOCLÉ** *veuille bien recevoir le témoignage de ma gratitude la plus vive pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mon travail et pour les conseils dont il a eu l'amabilité de me faire bénéficier.*

– *Je prie Monsieur le Professeur* **DUBOST** *de trouver ici l'assurance de mon dévouement respectueux. Qu'il veuille bien accepter mes remerciements les plus sincères pour l'intérêt qu'il m'a toujours témoigné.*

– *Monsieur le Professeur* **ARQUÈS** *m'a fait bénéficier de sa grande compétence par ses conseils et ses critiques tout au long de l'élaboration de cette thèse. Je l'en remercie très vivement et le prie d'être assuré de ma profonde gratitude.*

– *Je prie Monsieur l'Ingénieur Général de l'Armement* **ROMBOUT**, *Directeur du Centre d'Electronique de l'Armement, de bien vouloir accepter l'hommage de ma plus sincère et respectueuse reconnaissance pour avoir guidé mes premiers pas et m'avoir sans cesse encouragé et soutenu dans mes travaux.*

– *Monsieur* **LABIN**, *Président Directeur Général de la Société AERO, a su me faire découvrir et comprendre nombre de problèmes par ses critiques, ses remarques et les discussions dont il a bien voulu me faire profiter. Qu'il veuille bien recevoir ce témoignage de ma vive gratitude.*

– *Je tiens également à remercier mes collaborateurs de la Section d'Etudes et Fabrications des Télécommunications puis du Centre d'Electronique de l'Armement pour l'aide qu'ils m'ont constamment apportée. Ces remerciements s'adressent plus particulièrement à Monsieur* **BARBOTIN**, *dont le dévouement a mon égard a été sans égal, et à Monsieur* **GISCLARD**, *qui a réalisé la plus grande partie des programmes de calcul sur ordinateur.*

– *J'adresse encore mes remerciements aux personnels du Laboratoire de traitement du Signal, dirigé par Monsieur le Professeur* **ARQUÈS**, *qui m'ont apporté une aide soutenue lors de l'élaboration de cette thèse.*

ERRATA

Pages 18 lignes 8 et 9

au lieu de évolution

mettre évaluation

Page 18 ligne 12

au lieu de paramètres de système

mettre paramètres du système

Page 30 ligne –2

au lieu de $E\left[m_{ab}\right] =$

mettre $E\left[m_{nab}\right] =$

Page 31 ligne –7

au lieu de Bienaymé - Thebichef

mettre Bienaymé - Tchebicheff

Page 33 ligne 6

ajouter le signe = après C (ξ,η)

Page 35 ligne 12

au lieu de fréquencielle

mettre fréquentielle

Page 41 ligne –4

ajouter [32, 33]: après des formules suivantes

Page 45 ligne 7

au lieu de prallèles

mettre parallèles

Page 45 1ère ligne après la formule 8

au lieu de expression ou

mettre expression où

Page 49 tableau 7

au lieu de m_{gc}

mettre $|m_{gc}|$

Page 54 2e ligne après la formule 12

au lieu de m_c^2

mettre m_s^2

Page 55 3e et 4e formules

au lieu de $N - 1$

mettre $N - k$

Page 55 5e formule

ajouter à droite du 2e membre $+ \sigma_{gc}^2 \varphi_k$

Page 56 ligne 5

au lieu de $m_g = 0$

mettre $m_{gc} = 0$

Page 56 ligne –2

au lieu de raisoner

mettre raisonner

Pages 57 et 58, paragraphe 4-2

au lieu de m σ

mettre m_c σ_c

Page 57 ligne –6

au lieu de l'écart-type σ

mettre leur écart-type σ_c

Page 57 ligne –3

au lieu de par relation

mettre par une relation

Page 58 ligne 5

au lieu de position M

mettre position de M

Page 62 ligne –6

au lieu de variantes

mettre variances

Page 67 ligne –3

au lieu de représente une bonne approximation,

mettre représente , avec une bonne approximation,

Pages 72 et 73

remplacer partout l'indice g par gc

Page 83 lignes –10 et –9

il manque une phrase. Il faut lire :

«Le chapitre I est consacré à l'aspect purement expérimental de la fréquence de visibilité. Le chapitre II décrit , en termes de probabilité, une méthode de déter–mination théorique de la visibilité qui repose sur le calcul de la probabilité que la fonction "coupe de terrain" ... »

Page 85 ligne 10 du paragraphe 1-1

au lieu de gande

mettre grande

Page 88 1ère ligne après la fc rmule (48)

au lieu de supéreure

mettre supérieure

Page 90 4e ligne du paragraphe 2-1.a

au lieu de est normée par rapport à ... coupes ;

mettre est normée, pour chaque coupe, par rapport à l'écart-type σ de la coupe.

Page 93 2e ligne du 3e paragraphe

au lieu de	discritère
mettre	discrète

Page 98 1ère ligne après le tableau 9

mettre un ; après résultats

Page 98 3e ligne après le tableau 9

au lieu de	correspond
mettre	correspondant

Page 116 ligne 7

au lieu de	deux donnés
mettre	œux donnés

Page 133 1ère et 2e lignes du paragraphe c)

au lieu de	difraction
mettre	diffraction

Page 167 dernière ligne du paragraphe 1

au lieu de	supérieur
mettre	supérieure

Page 185 ligne 21

au lieu de	Remarque
mettre	Remarques

Page 195 ligne 3

au lieu de	d'écrit
mettre	décrit

ERRATA

Pages 106 lignes 6 et 14
108 lignes -5 et -1
au lieu de formule (60)
mettre formule (61)

Page 110 ligne 2
au lieu de formule (85)
mettre formule (71)

Page 202 lignes -2 et -1
au lieu de $|44|, |45|$
mettre $[44], [45]$

Fig. 65, axe des abscisses
au lieu de

mettre

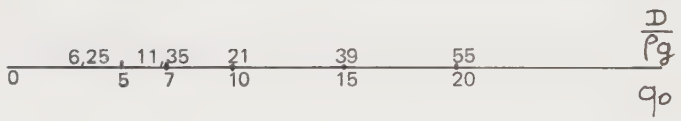


TABLE DES MATIERES

Pages

TRODUCTION 7

re PARTIE : PRINCIPE DE L'EVALUATION DE SYSTEMES PHYSIQUES PAR SIMULATION EN TEMPS REEL. 15

1- Rappel des méthodes classiques d'évaluation de systèmes

2- Avantages et inconvénients de la simulation pour l'évaluation des systèmes complexes

me PARTIE : ETUDE DE LA MORPHOLOGIE DU TERRAIN..... 21

TRODUCTION 23

HAPITRE I – INTRODUCTION A L'ETUDE DES FONCTIONS ALEATOIRES A DEUX VARIABLES– APPLICATION AU TERRAIN 25

1- Généralités

2- Stationnarité ,ergodisme et isotropie

2-1- Processus stationnaires- Notion d'isotropie

2-2- Processus stationnaires et ergodiques

3- Notion de coupe

4- Etude des propriétés statistiques du terrain

HAPITRE II – ETUDE STATISTIQUE DU RELIEF 37

1- Mise en forme des données

2- Etude de la loi de distribution des altitudes

2-1- Choix des paramètres

2-2- Résultats

3- Etude des coupes de terrain

3-1- Loi de distribution des altitudes

3-2- Cœfficients de corrélation

3-3- Recherche du mouvement lent

3-4- Propriétés du mouvement résiduel

3-5- Remarques concernant le cœfficient de corrélation C_k des altitudes

Pages

4- Tendances du terrain
4-1- Généralités
4-2- Résultats
4-3- Formulation
5- Conclusion
CHAPITRE III — MODELE MATHEMATIQUE DU RELIEF 65
1- Introduction
2- Définition du modèle mathématique
2-1- Loi de distribution des altitudes z(x,y), f(x,y), et g(x,y)
2-2- Fonction de corrélation de z(x,y), f(x,y) et g(x,y)
2-3- Représentation des coupes de terrain
CHAPITRE IV — ETUDE D'UN MODELE DE SIMULATION DES COUPES DE TERRAIN 71
1- Introduction
2- Génération du mouvement résiduel d'une coupe de terrain dont les extrêmités sont des points quelconques
3- Génération du mouvement résiduel d'une coupe de terrain dont les extrêmités sont des sommets relatifs
4- Cas général
5- Remarques
3eme PARTIE : ETUDE DE L'INTERVISIBILITE 81
INTRODUCTION 83
CHAPITRE I — ETUDE EXPERIMENTALE 85
1- Principe de la détermination expérimentale de l'intervisibilité
1-1- Visibilité à courte et moyenne distance
1-2- Visibilité à grande distance
2- Résultats
2-1- Généralités
2-2- Fréquences de visibilité
2-3- Pourcentage de parties vues

Pages

HAPITRE II — ETUDE THEORIQUE DE L'INTERVISIBILITE 93

1- Introduction

2- Etude du cas particulier $n=1$

2-1- Formulation

2-2- Cas particulier $h_0=h_1=0$

2-3- Cas particulier $q_0=1$

2-4- Remarques importantes

3- Etude du cas général $n>1$

3-I- Préliminaire

3-2- Détermination de $E\left[p_V\ (D,h_0,h_n)\right]$

3-3- Remarques

4- Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

CHAPITRE III — DETERMINATION DE L'INTERVISIBILITE A PARTIR DES COUPES SIMULEES 113

1- Définition de la méthode

2- Détermination de la fréquence de visibilité

3- Comparaison avec les méthodes expérimentale et théorique

1ème PARTIE : EXTENSIONS DE L'ETUDE DU TERRAIN 119

CHAPITRE I — ECHOS DE SOL RADAR 121

1- Introduction

2- Approche théorique de la détermination des échos de sol

2-1- Rappels

2-2- Détermination théorique du niveau de clutter

CHAPITRE II — PROPAGATION D'ONDES RADIOELECTRIQUES DE SOL 131

1- Généralités

2- Détermination de la probabilité d'affaiblissement de propagation entre émetteurs récepteurs situés au sol au voisinage de points hauts

CHAPITRE III — INTRODUCTION A L'ETUDE DU MICRORELIEF ET A LA GENERATION DE TERRAINS TRIDIMENSIONNELS 139

1- Introduction

2- Influence du microrelief

2-1- Propriétés statistiques du microrelief

2-2- Etude de l'intervisibilité en présence de microrelief

3- Génération de terrains tridimensionnels

Pages

CONCLUSION 151

ANNEXES 155

ANNEXE I — 157

1- Introduction

2- Calcul de $P_r\{A_o$ voit $A_1\}$ pour une coupe particulière

3- Calcul de $P_r\{A_1$ voit $A_o\}$ pour une coupe particulière

4- Calcul de $P_v\ (q_o,\ h_o,\ h_1)$ pour une coupe particulière

5- Calcul de $E\left[p_v(q_o,\ h_o,\ h_1)\right]$

ANNEXE II 167

1- Introduction

2- Loi de distribution de $\dfrac{g_{o,\ k} - g_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}$

3- Loi de distribution de $\dfrac{g_1 - g_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}$

ANNEXE III 173

ANNEXE IV — LA SIMULATION 179

1- Définition

2- Principes essentiels

2-1- Le modèle

2-2- Simulations déterministes et simulations stochastiques

2-3- Introduction du temps

2-4- Convergence de simulation

3- Génération de nombres aléatoires dans les simulations de Monte Carlo

3-1- Généralités

3-2- Génération de nombres aléatoires à répartition uniforme

3-3- Génération de nombres aléatoires à répartition quelconque

4- Langages de simulation

Pages

NNEXE V – EVALUATION D'UN SYSTEME SOL-AIR TEMPS CLAIR 189

1- Description sommaire du système

2- Description de la méthode de simulation en temps réel appliquée au S A T C

2-1- Principes

2-2- Déroulement

3- Moyens à mettre en oeuvre pour l'évaluation

IBLIOGRAPHIE..... 199

IGURES..... 203

INTRODUCTION

Le présent mémoire traite essentiellement de la représentation du milieu environnant dans l'évaluation par simulation des systèmes physiques placés en ambiance terrestre, la simulation pouvant ou non se dérouler en temps réel, avec ou sans éléments réels. (Par "système physique", ou plus simplement "système", on entend ici un ensemble de matériels différents concourant tous à la réalisation d'un même but, avec ou sans l'aide d'opérateurs humains).

Le problème est d'importance si l'on songe que beaucoup de systèmes physiques reposent sur l'émission et la réception de signaux électromagnétiques par des dispositifs situés au voisinage du sol (par exemple : lasers, radars, faisceaux hertziens, émetteurs-récepteurs radioélectriques, sondes altimétriques). C'est pourquoi, dans plusieurs pays membres de l'Organisation du Traité de l'Atlantique Nord (OTAN), et notamment en France, quelques chercheurs ont récemment entrepris des travaux pour tenter d'introduire de manière plus précise l'influence du terrain (relief et végétation) dans l'étude des performances de systèmes fonctionnant au voisinage du sol [1,2,3,4] .

Plusieurs méthodes sont a priori envisageables pour tenir compte du terrain dans l'évaluation des systèmes liés au sol. La plus simple, et la plus communément employée semble-t-il, consiste à digitaliser des terrains (à partir par exemple de cartes géographiques ou de photographies aériennes), à stocker les données correspondantes sur ordinateur, et à observer par simulation les limitations introduites par le relief ou la végétation sur les performances des systèmes en question : influence des masques de terrain sur la visibilité optique, perturbations produites dans la chaine de réception des radars par les échos de sol, réduction de la portée des liaisons radioélectriques, etc ....

Les résultats obtenues à l'aide d'une telle méthode peuvent être très satisfaisants, sous réserve que les algorithmes établis par exemple pour la détermination de l'intervisibilité entre deux points ou le calcul de l'affaiblissement de propagation soient eux mêmes suffisamment réalistes. Toutefois la méthode présente un certain nombre d'inconvénients :

- nécessité d'effectuer un travail souvent considérable pour la digitalisation de terrains de dimensions importantes (quelques dizaines de kilomètres de côté) ;

- encombrement prohibitif des mémoires d'ordinateurs (une région de 100 km de côté, digitalisée avec un pas de 100 m par exemple, nécessite pour son stockage une mémoire de un million de mots) ;

- corrélativement, difficulté d'une étude paramétrique de l'influence du relief ou de la végétation sur les performances d'un système.

C'est pourquoi, sans nier l'intérêt d'une méthode que nous avons d'ailleurs utilisée avec profit, dès 1965, pour l'évaluation de certains systèmes par simulation, nous avons étudié d'autres approches possibles de la question et mis au point plusieurs algorithmes qui permettent d'aborder sous un jour nouveau la plupart des problèmes liés au terrain.

Le premier de ces procédés consiste à générer sur ordinateur des terrains "synthétiques" ayant des caractéristiques statistiques identiques à celles de terrains réels. L'avantage principal de la méthode réside, comme on le verra plus loin, dans la réduction fort importante (dans un rapport 100 environ) du travail de digitalisation, à partir de cartes géographiques par exemple, sans pour autant diminuer de façon notable le réalisme de l'évaluation des systèmes placés en ambiance terrestre.

L'idéal serait de pouvoir générer des terrains tridimensionnels, c'est-à-dire des ensembles de points $M(x_i, y_j)$, mais la mise en oeuvre des algorithmes correspondants présente de grandes difficultés. C'est pourquoi nous nous sommes limités ici, dans l'immédiat, à la génération de coupes de terrain, ce qui, dans la pratique, suffit d'ailleurs pour traiter les principaux problèmes qui se posent. (Il est bien entendu toujours possible, lorsque les circonstances l'exigent, d'utiliser des terrains digitalisés ainsi qu'on l'a indiqué plus haut).

Par ailleurs nous avons étudié et développé une autre méthode qui consiste à représenter le relief et la végétation sous forme d'un nombre limité de paramètres statistiques et à effectuer une étude probabiliste de l'influence du terrain sur les performances d'un système. Nous avons ainsi mis au point des algorithmes permettant de calculer la probabilité d'intervisibilité de deux points situés au sol ou au dessus du sol, avec ou sans végétation, et de déterminer le niveau d'échos de sol radar ainsi que l'affaiblissement de propagation d'ondes radioélectriques. Ces algorithmes reposent sur une méthode nouvelle (mais approchée, car, à notre connaissance, il n'en existe pas de rigoureuse) de calcul de la probabilité d'intersection d'une fonction aléatoire et d'une droite quelconque.

*

* *

Hormis les annexes et les figures, le présent document comprend quatre parties.

Dans la 1ère partie , outre quelques considérations générales sur les techniques de simulation, on décrit une méthode d'évaluation des systèmes physiques par simulation en "temps réel". Cette méthode consiste essentiellement à faire fonctionner le système dans sa quasi-totalité et à simuler sur calculateur numérique, analogique ou hybride tout le milieu environnant (terre, mer, atmosphère). Ce procédé, apparemment très peu répandu en France, voire en Europe, présente un certain nombre d'avantages : il permet notamment une évaluation plus réaliste que celle obtenue à partir d'une simulation purement théorique et en outre il est beaucoup moins onéreux que l'expérimentation directe. Bien entendu une telle technique, pour être pleinement satisfaisante, suppose que la simulation soit au moins une fois "recalée" grâce à des essais en vraie grandeur (et, bien entendu, que les modèles d'environnement soient suffisamment réalistes).

La 2e partie concerne l'étude de la morphologie du terrain, en faisant abstraction de la végétation. On a, à cet effet, choisi trois régions de 20 x 25 km^2 (Orléans, Saulieu, Saint-Flour) et, à partir des cartes géographiques au 1/25 000 correspondantes, on a procédé à un échantillonnage du terrain. Le pas d'échantillonnage a été pris égal à 125 m, aussi bien en X qu'en Y. L'ensemble des altitudes ainsi relevées a été stocké sur des mémoires à disques magnétiques et traité à l'aide d'un ordinateur IBM 360/30.

L'étude statistique, pour chaque région, de la population constituée de l'ensemble des points montre que l'altitude suit très sensiblement une loi de Gauss tronquée. Par ailleurs l'étude des caractéristiques des coupes de terrain montre que les divers paramètres statistiques (moyenne, variance, coefficients de corrélation), varient beaucoup d'une coupe à l'autre : le terrain ne peut donc pas être considéré comme homogène. Toutefois si l'on décompose chaque coupe de terrain en une tendance et un mouvement résiduel, il apparaît que le mouvement résiduel jouit de propriétés statistiques très intéressantes. En effet si, pour chaque coupe résiduelle, on normalise les altitudes par rapport à l'écart-type, on constate que :

- la variable aléatoire (v.a) correspondante, de moyenne nulle et de variance 1, suit une loi de Gauss tronquée ;

- les troncatures varient peu avec la position de la coupe et avec le type terrain ;

- la fonction de corrélation "temporelle" décroît très vite et en outre diffère peu d'une coupe à l'autre et d'une région à l'autre.

Par conséquent un terrain quelconque z(x,y) peut être considéré comme la superposition d'une tendance analytique f(x,y) et d'un mouvement résiduel g(x,y) qui, à une affinité près sur les altitudes, est très semblable d'une région à l'autre et, pour une région donnée, présente un caractère d'homogénéité incontestable : le terrain résiduel peut donc être assimilé à une fonction aléatoire (à deux variables) stationnaire, ergodique et isotrope.

Cette propriété est d'un très grand intérêt. Elle est à l'origine d'une méthode de génération de coupes de terrain "synthétiques" par simulation stochastique. Le procédé consiste essentiellement à créer une suite d'altitudes gaussiennes corrélées entre elles (méthode de la pseudo-racine carrée de la matrice de covariance) et à superposer la coupe résiduelle ainsi obtenue à la tendance (réelle) de la coupe que l'on veut générer. (Comme nous l'avons indiqué plus haut, la génération de terrains tridimensionnels de la forme z(x,y), pose un certain nombre de problèmes qui n'ont pas encore été résolus).

Parmi les critères possibles pour tester la validité de la méthode, on a retenu en définitive celui de l'intervisibilité entre deux points situés au sol ou au-dessus du sol : on a postulé qu'un ensemble de coupes de terrain simulées pouvait être considéré comme statistiquement identique à un ensemble de coupes réelles si les fréquences d'intervisibilité obtenues en

prenant comme paramètres la hauteur des points au dessus du sol ainsi que leur distance étaient analogues dans les deux cas.

La 3^{e} partie est consacrée au problème de l'intervisibilité entre deux points A et B situés au sol ou au dessus du sol à des hauteurs h_A et h_B. Ce problème se traite en recherchant si la droite A B coupe ou non la coupe de terrain correspondante. Cette question a été abordée sous trois angles :

a) d'un point de vue purement expérimental ;

b) de manière théorique en déterminant la probabilité d'intersection d'une droite avec une fonction aléatoire (la méthode consiste essentiellement à décomposer la fonction aléatoire en une succession de paliers de longueur ρ, à supposer que deux points distants de ρ sont décorrélés, et à calculer la probabilité pour qu'aucun des points ne coupe la droite A B) ; la comparaison entre les expressions théoriques ainsi obtenues et les résultats expérimentaux est très satisfaisante ;

c) en utilisant des coupes de terrains générées par simulation et en procédant comme au paragraphe a) ; là encore la concordance est très satisfaisante.

La 4^{e} partie ,enfin, rassemble un certain nombre d'applications et d'extensions des calculs précédents :

a) détermination des échos de sol radar (clutter) ;

b) calcul de l'affaiblissement de propagation moyen pour une liaison radioélectrique en onde de sol ;

c) étude de l'influence de la végétation sur la probabilité d'intervisibilité ;

d) introduction à la génération de terrains tri-dimensionnels.

1e P A R T I E

PRINCIPE DE L'EVALUATION DE SYSTEMES PHYSIQUES

PAR SIMULATION EN TEMPS REEL

1 - RAPPEL DES METHODES CLASSIQUES D'EVALUATION DE SYSTEMES

En première analyse, un système peut être soit déjà réalisé, soit en cours de réalisation, soit encore à l'étude, c'est-à-dire au stade de l'avant projet ou du projet. Dans le 1er cas, la méthode la plus répandue est l'expérimentation directe. Les avantages sont évidents : réalisme dans la détermination des caractéristiques et des performances du système, facilité de tenir compte des facteurs humains, préhension plus immédiate des phénomènes. Mais les inconvénients sont nombreux : prix généralement élevé des essais, ce qui en limite de nombre (il suffit de penser par exemple au coût de l'heure de vol d'un avion ou de tir d'un engin même petit), impossibilité d'effectuer certains essais qui risqueraient de détruire le système (un exemple spectaculaire est celui de Saturne 5 et d'Apollo), impossibilité fréquente de modifier les caractéristiques du milieu environnant (la plupart de temps, l'expérimentateur de système doit subir le milieu ambiant). C'est pourquoi la tendance actuelle, aux Etats-Unis en tout cas, est de multiplier en cours d'étude et de réalisation les essais technologiques sur les composants ou les sous-ensembles ainsi que les simulations partielles, avec ou sans éléments réels, afin de diminuer dans toute la mesure du possible le nombre des essais globaux.

Par ailleurs, lorsque le système en est encore au stade de l'étude de principe, deux méthodes complémentaires sont fréquemment utilisées : l'étude paramétrique, purement théorique, et la simulation numérique ou hybride.

L'étude paramétrique, qui utilise essentiellement l'outil mathématique, permet de déduire quelles seront, en première approximation, les performances de telle ou telle réalisation. Pour les systèmes de conception simple, une telle étude peut être menée de façon purement analytique sans difficulté majeure. Par contre, au fur et à mesure que la complexité des matériels augmente (ce qui devient de plus en plus le cas général), les théories et les formulations mathématiques deviennent de moins en moins accessibles et exigent de ce fait des simplifications et des approximations qui, très rapidement, diminuent la qualité de la prévision. De plus, le volume croissant des calculs numériques rend l'aide d'un ordinateur le plus souvent indispensable.

Lorsque la méthode analytique est inextricable, ou même trop imprécise, l'évaluation prévisionnelle des performances d'un système demeure néanmoins possible, grâce à un outil très puissant : la simulation, qu'elle soit numérique, analogique ou hybride [5 à 30]. L'annexe IV en décrit brièvement les principes essentiels.

2 - AVANTAGES ET INCONVENIENTS DE LA SIMULATION POUR L'EVALUATION DES SYSTEMES COMPLEXES.

Ainsi donc , la simulation est un des moyens utilisés pour l'évaluation des systèmes (mais elle a aussi d'autres applications !), en concurrence avec l'expérimentation directe et l'étude paramétrique. Elle n'a pas les limitations que présentent l'expérimentation ou l'outil purement mathématique, et c'est ce qui fait son succès. Cependant les enseignements que peut apporter une simulation ne suffisent généralement pas à une évolution complète des systèmes.

En effet, en contrepartie de ses multiples avantages (et notamment : facilité de mise en oeuvre, souplesse d'emploi, possibilité d'une étude approfondie sur l'influence des principaux paramètres de système, répétitivité, coût modéré vis à vis de la richesse des informations obtenues), la simulation présente un certain nombre d'insuffisances :

- il n'est pas toujours possible de simuler correctement certains phénomènes complexes (le comportement humain en est un exemple typique) ;

- il est souvent nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices pour représenter le fonctionnement de certains sous-ensembles d'un système ;

- la représentation des phénomènes aléatoires est parfois inexacte, soit que l'on manque de données expérimentales suffisantes pour caractériser convenablement les lois de probabilité, soit que l'on soit obligé, à cause de considérations pratiques, de remplacer les lois de probabilité exactes par des lois approchées plus aisées à formuler.

La simulation classique (numérique, analogique ou hybride) ne suffit donc pas, dans la plupart des cas, à une évaluation complète et précise d'un système physique, pas plus d'ailleurs que l'étude paramétrique ou l'expérimentation directe. C'est pourquoi, le plus souvent, l'évaluation d'un système comprend plusieurs phases séquentielles :

- l'étude paramétrique et éventuellement la simulation au moment de la conception,

- les essais technologiques et éventuellement les simulations partielles durant la phase d'étude et de réalisation du prototype,

- l'expérimentation finale portant sur l'ensemble du système et sur certains de ses sous-ensembles.

Sans nier l'intérêt de cette façon de procéder, il faut toutefois convenir que, pour des raisons financières ou de délais ou encore pour des motifs purement techniques, une telle évaluation est souvent insuffisamment complète. C'est pour remédier, partiellement, à cet inconvénient que l'on a proposé une méthode d'évaluation qui présente la plupart des avantages de la simulation et de l'expérimentation sans toutefois en avoir les inconvénients : l'évaluation par simulation hybride et en temps réel, avec éléments réels. Cette méthode consiste, grosso-modo, à expérimenter le système (ou du moins la plus grande partie de ses éléments) en simulant le milieu environnant. Ainsi les matériels peuvent fonctionner dans des conditions réalistes (sous réserve, pour certains d'entre eux, que le milieu environnant soit correctement simulé) et extrêmement variées ce qui autorise une évaluation à la fois complète et précise.

Il faut noter toutefois que cette méthode n'élimine pas l'étude paramétrique ni certaines simulations partielles indispensables à l'étude du système ; elle ne peut pas non plus se substituer aux essais technologiques sur les composants ou les sous-ensembles. Par contre elle permet de remplacer l'expérimentation directe du système, presque toujours onéreuse et longue, par une opération qui, à prix égal, est sensiblement plus brève et cependant bien plus riche en enseignements que la précédente. Bien entendu l'expérimentation ne peut être totalement supprimée, ne serait-ce que pour "recaler" la simulation et effectuer certains essais très particuliers.

Afin de mieux préciser la méthode, on a décrit en annexe V un cas concret, celui de l'évaluation d'un système sol-air "temps clair" destiné à la poursuite d'avions volant à basse altitude (15 à 1 500 m par exemple).

Toutefois, pour être pleinement efficace, une telle méthode doit s'appuyer sur un ensemble de modèlescapables de représenter convenablement l'environnement du système.

Les parties suivantes sont consacrées à l'étude de l'environnement terrestre ; celui-ci présente en effet un intérêt tout particulier, étant donné que, assez fréquemment, les systèmes physiques que l'on est conduit à évaluer sont plus au moins directement reliés au sol.

L'introduction du milieu terrestre peut, comme on l'a vu plus haut, s'effectuer de trois manières :

- sous forme de terrains réels digitalisés,
- sous forme de terrains synthétiques, statistiquement identiques à des terrains réels,
- par l'intermédiaire de lois statistiques permettant une étude probabiliste des phénomènes liés au sol.

Ces trois aspects sont abordés dans les pages qui suivent.

2e PARTIE

ETUDE DE LA MORPHOLOGIE DU TERRAIN

INTRODUCTION

On a vu dans la partie précédente que l'évaluation par simulation d'un système physique fonctionnant au voisinage du sol ne peut se faire correctement que si l'on sait convenablement représenter le milieu terrestre environnant. Les principaux paramètres susceptibles d'être pris en considération lors d'une simulation sont : la morphologie du sol, les caractéristiques de la végétation et des constructions (microrelief), ainsi que l'influence du terrain sur l'intervisibilité optique, la propagation des ondes radioélectriques et les échos de sol radar.

La présente partie est consacrée à l'étude du relief proprement dit, en considérant un terrain quelconque comme une réalisation particulière d'un processus aléatoire à deux variables. On insistera tout particulièrement sur l'aspect "coupes de terrain", étant donné que, dans la pratique, les coupes de terrain (rectilignes ou curvilignes) entrent pour une bonne part dans l'étude des performances des systèmes liés au sol.

Cette 2ème partie comprend 4 chapitres relatifs successivement à :

a) une introduction à l'étude des fonctions aléatoires à deux variables,

b) l'étude expérimentale des propriétés statistiques du relief (en faisant abstraction du microrelief),

c) l'étude d'un modèle mathématique du relief traduisant en termes de fonctions aléatoires les propriétés statistiques observées,

d) la détermination d'une méthode de génération de terrains synthétiques statistiquement identiques à des terrains réels.

CHAPITRE I

INTRODUCTION A L'ETUDE DES FONCTIONS ALEATOIRES A DEUX VARIABLES - APPLICATION AU RELIEF

1 - GENERALITES

Désignons par $\{Z(x,y)\}$ une fonction aléatoire à deux variables et par $z(x,y)$ une des réalisations particulières de $\{Z(x,y)\}$ (dans le cas du terrain x et y désignent les coordonnées horizontales et z l'altitude). Soit en outre $M(x_i,y_j)$ le point de $z(x,y)$ dont les coordonnées sont x_i et y_j. Si l'on considère l'ensemble M_{ij} des points $M(x_i,y_j)$ des différentes réalisations $z(x,y)$ correspondant à un couple de valeur x_i et y_j données, on obtient une variable aléatoire Z_{ij} qui possède une certaine loi de probabilité. La connaissance de $\{Z(x,y)\}$ en $x=x_i$ et $y=y_j$ revient donc à l'étude de la variable aléatoire Z_{ij}. (On notera que le fait de considérer un nombre fini N de réalisations particulières $z_1(x_i,y_j)$, $z_2(x_i,y_j)$, ... $z_\ell(x_i,y_j)$, ... $z_N(x_i,y_j)$ permet d'avoir un échantillon de taille N de cette variable aléatoire).

Par analogie avec les fonctions aléatoires à une seule variable [42] on peut définir un certain nombre de notions générales permettant de caractériser $\{Z(x,y)\}$.

Fonction de répartition première F_1

x_i et y_j étant fixés, c'est une fonction de la variable z définie par

$$F_1(z,x_i,y_j) = P_r\{Z_{ij} < z\}$$

S'il existe une fonction p_1 telle que :

$$F_1(z,x_i,y_j) = \int_{-\infty}^{z} p_1(t,x_i,y_j)\, dt$$

p_1 est la densité de probabilité de Z_{ij} et on écrit :

$$p_1(z,x_i,y_j)\,dz = P_r\{z < Z_{ij} < z + dz\}$$

On peut ensuite, à partir de p_1, définir les quantités suivantes :

$$E\left[Z\,(x_i,y_j)\right] = m_1(Z_{ij}) = \int_{-\infty}^{\infty} z\; p_1(z,x_i,y_j)\,dz$$

(moyenne de $\{Z(x,y)\}$ pour $x=x_i$ et $y=y_j$)

$$E\left[Z^2(x_i,y_j)\right] = m_2(Z_{ij}) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2\; p_1(z,x_i,y_j)\,dz$$

$$E\left[Z^n(x_i,y_j)\right] = m_n(Z_{ij}) = \int_{-\infty}^{\infty} z^n\; p_1(z,x_i,y_j)\,dz$$

Dans le cas d'un processus quelconque, ces différentes quantités sont des fonctions de x_i et y_j, c'est-à-dire qu'elles dépendent de la position M_{ij} où l'on étudie $\{Z(x,y)\}$; on les désignera sous le nom de moyennes "statistiques" ou "spatiales".

Fonction de répartition seconde F_2

Considérons les deux variables aléatoires Z_{ij} et $Z_{i',j'}$, correspondant à deux points M_{ij} et $M_{i'j}$ de coordonnées (x_i,y_j) et $(x_{i'},y_{j'})$.

La fonction de répartition seconde est définie par :

$$F_2(z,x_i,y_j\ ;\ z',x_{i'},y_{j'}) = P_r\{Z_{ij} < z\ ;\ Z_{i'j'} < z'\}$$

z et z' étant deux valeurs arbitraires.

Le couple $(Z_{ij},Z_{i'j'})$ admet une densité de probabilité p_2 si :

$$F_2(z,x_i,y_j\ ;\ z',x_{i'},y_{j'}) = \int_{-\infty}^{z} dt \int_{-\infty}^{z'} p_2(t,x_i,y_j\ ;\ t',x_{i'},y_{j'})\,dt'$$

Covariance

Posons

$$(1)\quad \begin{cases} x_{i'} - x_i = \xi \\ y_{j'} - y_j = \eta \end{cases}$$

On définira le covariance de $\{Z(x,y)\}$ par

$$R(x_i, y_j, \xi, \eta) = E\left[Z(x_i, y_j) \cdot Z(x_i+\xi, y_j+\eta)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} p_2(z, x_i, y_j; z', x_{i'}, y_{j'}) dz'$$

Fonction de répartition $n^{ième}$ F_n

Elle se définit de la même manière que F_2. On admettra sans le démontrer que la suite des fonctions F_1, F_2, ... F_n, ... définit complètement le processus.

- STATIONNARITE, ERGODISME et ISOTROPIE

2-1- PROCESSUS STATIONNAIRES - NOTION D'ISOTROPIE

On dira que le processus est "stationnaire au sens strict" si toutes les propriétés statistiques sont indépendantes de l'origine des coordonnées x et y. Dans ces conditions, on désignera, pour simplifier les notations, par :

(2)

$F_1(z)$ la fonction de répartition première,

$m_1 = E\left[Z(x,y)\right]$ la valeur moyenne,

$m_n = E\left[Z^n(x,y)\right]$ les moments d'ordre n

$R(\xi,\eta) = E\left[Z(x,y) \cdot Z(x+\xi\ ,\ y+\eta)\right]$ la fonction de corrélation (qui ne dépend que des différences $\xi = x_{i'} - x_i$, $\eta = y_{j'} - y_j$)

$F_n(z\ ;\ z', \xi, \eta\ ;\ z_1', \xi_1, \eta_1\ ;\ \ldots)$ la fonction de répartition $n^{ième}$.

Dans les études ne faisant intervenir que les moments des deux premiers ordres, on peut supposer une "stationnarité du 2e ordre "plus faible, se traduisant en particulier par une stationnarité du 1er moment et de la covariance.

Par ailleurs si la fonction de corrélation $R(\xi,\eta)$ ne dépend que du module $\theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, on dira que le processus est "isotrope". Il est à noter que les fonctions aléatoires stationnaires et isotropes à deux variables jouissent de propriétés particulières qui permettent de ramener leur étude à celle de fonctions aléatoires stationnaires d'une seule variable [43].

2-2- PROCESSUS STATIONNAIRES ET ERGODIQUES

Considérons maintenant une réalisation particulière $z(x,y)$ d'un processus aléatoire $\{Z(x,y)\}$ stationnaire au sens strict. On pourra définir pour cet échantillon des moyennes que nous appellerons "temporelles" par analogie avec les fonctions aléatoires à une variable.

Pour ces dernières, les moyennes sont définies sur un intervalle $(-T,T)$: si f est une fonction mesurable, on a pour une réalisation $z(t)$ de $\{Z(t)\}$

$$< f(z) > = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f\left[z(t)\right] dt$$

Si le processus est ergodique, ces moyennes existent (lorsque T augmente indéfiniment) et, quel que soit l'échantillon $z(t)$ considéré, sont égales aux moyennes statistiques ; donc :

$$E\left\{f\left[Z(t)\right]\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, d\, F_1(z) = < f(z) >$$

Ici, il nous faut chosir la famille d'ensembles dans R^2, puisque l'on travaille sur une fonction aléatoire à deux variables x et y. Si l'on suivait Wiener [44] , on considérerait comme domaine de variation de x et y des cercles de rayon ρ (ρ tendant vers l'infini), mais la nature du problème conduit à introduire des rectangles $(-a,a) \times (-b,b)$, avec $a=a_1\, T$ et $b=b_1\, T$, puisqu'une carte géographique est elle même un rectangle et qu'elle constitue une partie d'une réalisation particulière,ainsi qu'on le verra plus loin . Ces rectangles constituent d'ailleurs une famille ergodique au sens de

J. BOCLE [45]. Ainsi nous sommes amenés à formuler l'hypothèse d'ergodicité pour une fonction aléatoire à deux variables {Z(x,y)} : le processus est ergodique si, f étant une fonction mesurable, toute moyenne

$$< f(z) > = \frac{1}{4a_1 b_1 T^2} \int_{-a_1 T}^{a_1 T} \int_{-b_1 T}^{b_1 T} f\left[z(x,y)\right] \, dx \, dy$$

converge lorsque T tend vers l'infini et si la limite correspondante est indépendante de la réalisation z(x,y) et égale à la moyenne statistique

$$E\left\{f\left[Z(x,y)\right]\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \, d \, F_1(z)$$

De même si l'on considère des couples de variables $[z(x,y),z'(x,y)]$, avec $z'(x,y) = z(x+\xi,y+\eta)$, on peut définir des "moyennes croisées" :

$$< f(z,z') > = \lim T \to \infty \frac{1}{4a_1 b_1 T^2} \int_{-a_1 T}^{a_1 T} \int_{-b_1 T}^{b_1 T} f\left[z(x,y).z\ (x+\xi,y+\eta)\right] \, dx \, dy$$

Parmi les différentes fonctions f que l'on peut envisager, nous attacherons un intérêt tout particulier aux moments temporels d'ordre n ainsi qu'à la fonction de corrélation temporelle.

Posons alors :

$$\left| \begin{array}{l} m_{nab} = \frac{1}{4ab} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} z^n(x,y) \, dx \, dy \\ \\ R_{ab}(\xi,\eta) = \frac{1}{4ab} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} z(x,y) \cdot z(x+\xi,y+\eta) dx \, dy \end{array} \right.$$

(-a,a) et (-b,b) étant les domaines de variation de x et y.

Les moments temporels d'ordre n de l'échantillon z(x,y) peuvent alors être définis par :

(3) $$< z^n(x,y) > = \lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} m_{nab}$$

et la fonction de corrélation temporelle par :

$$(3') \quad \langle z(x,y) \cdot z(x+\xi,y+\eta) \rangle = \lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} R_{ab}(\xi,\eta)$$

(Ces définitions ne sont correctes que dans la mesure où les limites ne dépendent pas de l'origine des coordonnées x et y : cette condition est réalisée si le rapport $\frac{a}{b}$ reste constant quand a et b tendent vers l'infini).

Si le processus est ergodique les différentes moyennes temporelles existent et, quel que soit l'échantillon z(x,y) considéré, sont égales aux moyennes statistiques. Donc, en particulier :

$$(4) \quad \begin{cases} \langle z^n(x,y) \rangle = E[Z^n(x,y)] = m_n \\ \langle z(x,y) \cdot z(x+\xi,y+\eta) \rangle = E[Z(x,y) \cdot Z(x+\xi,y+\eta)] = R(\xi,\eta) \end{cases}$$

Si en outre le processus est gaussien ce qui, on le verra, est pratiquement le cas pour le terrain, l'étude du second ordre est suffisante pour caractériser toutes les autres propriétés. Il suffit donc d'étudier, sur une seule des réalisations particulières, la moyenne $m=\langle z(x,y) \rangle$ et la fonction de corrélation $R(\xi,\eta)=\langle z(x,y) \cdot z(x+\xi,y+\eta) \rangle$ pour avoir une connaissance complète de $\{Z(x,y)\}$.

Considérons maintenant un échantillon $\Delta z_o(x,y)$, obtenu expérimentalement, de dimensions finies (-a,a) et (-b,b). On suppose que $\Delta z_o(x,y)$ est extrait d'une réalisation particulière $z_o(x,y)$ d'un processus aléatoire $\{Z(x,y)\}$, stationnaire au sens strict et ergodique, et qu'il lui correspond un échantillon $\Delta z(x,y)$ pour chacune des réalisations particulières z(x,y) de $\{Z(x,y)\}$.

Désignons par m_{nab} et $R_{ab}(\xi,\eta)$ les moments relatifs à $\Delta z(x,y)$ et par $E[m_{nab}]$ et $E[R_{ab}(\xi,\eta)]$ les espérances mathématiques de ces moments. Il vient

$$E[m_{ab}] = \frac{1}{4ab} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} E[Z^n(x,y)] \, dx \, dy = E[Z^n(x,y)] = m_n$$

$$E[R_{ab}(\xi,\eta)] = \frac{1}{4ab} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} E[Z(x,y) \cdot Z(x+\xi,y+\eta)] \, dx \, dy = R(\xi,\eta)$$

Donc les moments $\left[m_{nab}\right]_o$ et $\left[R_{ab}(\xi,\eta)\right]_o$ qu'on peut observer expérimentalement sur $\Delta z_o(x,y)$ sont des estimateurs sans biais des moyennes spatiales m_n et $R(\xi,\eta)$.

Considérons par exemple la moyenne $\left[m_{1ab}\right]_o$ que l'on désignera pour simplier l'écriture par m_{ab} et cherchons sa variance $\sigma^2(m_{ab})$. De la même manière que pour les fonctions aléatoires à une variable, on démontre que :

$$\sigma^2(m_{ab}) = \frac{1}{ab}\int_o^{2a}\int_o^{2b} (1 - \frac{\xi}{2a})\ (1 - \frac{\eta}{2b})\ \left[R(\xi,\eta) - m^2\right]\ d\xi\ d\eta$$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebicheff, il vient :

$$Pr\ \{|m_{ab} - m| > h\ \sigma(m_{ab})\} \leqslant \frac{1}{h^2}$$

Par conséquent, au seuil de confiance de $1 - \frac{1}{h^2}$, la valeur maximale que peut prendre la variable $|m_{ab}-m|$ est $\varepsilon m = h\sigma(m_{ab})$; donc, h et ε étant fixés, a et b doivent être tels que :

$$\sigma^2(m_{ab}) = (\frac{\varepsilon m}{h})^2$$

Les bornes ainsi obtenues seraient vraisemblablement bien trop larges et il paraît préférable de supposer que m_{ab} tend vers une variable gaussienne lorsque a et b tendent vers l'infini. Dans ce cas l'inégalité de Bienaymé - Thébichef devient :

$$Pr\ \{|m_{ab} - m| > h_1\ \sigma(m_{ab})\} \leqslant \frac{1}{h_2^2}$$

avec, par exemple, $h_1 = 2{,}6$ pour $h_2 = 10$. Donc :

$$\sigma^2(m_{ab}) = (\frac{\varepsilon\ m}{h_1})^2 (h_2 \text{ étant donné})$$

d'où

$$(\frac{\varepsilon\ m}{h_1})^2 = \frac{1}{ab}\int_o^{2a}\int_o^{2b} (1 - \frac{\xi}{2a})\ (1 - \frac{\eta}{2b})\ \left[R(\xi,\eta) - m^2\right]\ d\xi\ d\eta$$

ou encore

$$\frac{1}{a\,b}\int_0^{2a}\int_0^{2b}\left(1-\frac{\xi}{2a}\right)\left(1-\frac{\eta}{2b}\right)C(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=\left(\frac{m}{\sigma}\frac{\varepsilon}{h_1}\right)^2$$

en désignant par $C(\xi,\eta)$ la fonction de corrélation centrée et normée et σ l'écart type. Cette expression permet de calculer les dimensions de l'échantillon, en supposant connues les moyennes spatiales des deux premiers ordres- m, σ et $C(\xi,\eta)$- et en se fixant les grandeurs ε (par exemple 10^{-2}) et h_1 (par exemple 2,6).

3 - NOTION DE COUPE

Considérons une réalisation particulière $z(x,y)$ de $\{Z(x,y)\}$ et soit $\mathcal{J}[x,P(x)]$ l'intersection de $z(x,y)$ et d'un plan vertical $y=P(x)$. En procédant de même avec toutes les réalisations particulières de $\{Z(x,y)\}$, on obtient une fonction aléatoire $\{Z[x,P(x)]\}$ à une variable. Chacune des réalisations particulières $\mathcal{J}[x,P(x)]$ de $\{Z[x,P(x)]\}$, que l'on appellera "coupe", a pour projection sur le plan horizontal (x,y) la droite d'équation $y=P(x)$.

Si la fonction aléatoire à deux variables $\{Z(x,y)\}$ est stationnaire, $\{Z[x,P(x)]\}$ est évidemment aussi stationnaire. Les moments $E\{Z^n[x,P(x)]\}$ de la fonction $\{Z[x,P(x)]\}$, égaux à $E[Z^n(x,y)]$, ne dépendent pas de l'origine des coordonnées sur la droite $y=P(x)$.

En outre la fonction de corrélation $E\{Z[x,P(x)]\cdot Z[x+\xi,P(x+\xi)]\}$, égale à $E[Z(x,y).Z(x+\xi,y+\eta)]$, avec $\eta=\xi\,P'(x)$, ne dépend que de ξ et de la pente $P'(x)$ de la droite. Si de plus $\{Z(x,y)\}$ est isotrope, cette fonction de corrélation ne dépend que de $\theta=\xi\sqrt{1+P'^2(x)}$, valeur du "retard" le long de la droite.

Par ailleurs, si l'on s'en tient à des domaines de variation de x et y infinis, nous admettrons sans l'avoir démontré que l'ergodicité sur $\{Z(x,y)\}$ entraîne l'ergodicité sur $\{Z[x,P(x)]\}$. Si tel est le cas et si de plus $\{Z(x,y)\}$ est stationnaire, il résulte de ce qui précède que les moyennes temporelles observées sur n'importe laquelle des coupes (de longueur supposée infinie), intersection d'une réalisation particulière quelconque $z(x,y)$ de $\{Z(x,y)\}$ et d'un plan quelconque $y=P(x)$, doivent être identiques aux moyennes temporelles correspondantes observées sur n'importe laquelle des réalisations du processus à deux variables.

Si maintenant l'on considère le domaine $\Delta z_o(x,y)$ et une coupe y=cste par exemple et si l'on désigne par m_a la valeur moyenne obtenue sur cette coupe, on peut de la même manière que précédemment écrire que $\sigma^2(m_a) = (\frac{\varepsilon' m}{h_1})^2$, avec :

$$\sigma^2(m_a) = \frac{\sigma^2}{a} \int_o^{2a} (1 - \frac{\xi}{2a})\, C(\xi,o)\, d\xi$$

Pour essayer de comparer ε' à ε, on va supposer à titre d'exemple que $C(\xi,\eta) = e^{-s\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$.

Il vient alors, en supposant que **a = b** pour simplifier les calculs :

$$\frac{1}{a^2} \int_o^{2a}\int_o^{2a} (1 - \frac{\xi}{2a})(1 - \frac{\eta}{2a})\, e^{-s\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\, d\xi\, d\eta = (\frac{\varepsilon m}{h_1})^2$$

$$\frac{1}{a} \int_o^{2a} (1 - \frac{\xi}{2a})\, e^{-s\xi}\, d\xi = (\frac{\varepsilon' m}{h_1})^2$$

On obtient une majorante de a en écrivant :

$$I = \frac{1}{a^2} \int_o^{\infty}\int_o^{\infty} (1 - \frac{\xi}{2a})\,(1 - \frac{\eta}{2a}) e^{-s\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\, d\xi\, d\eta = (\frac{\varepsilon m}{h_1})^2$$

soit encore, en faisant le changement de variable

$$\begin{cases} \xi = \theta \cos\alpha \\ \xi = \theta \sin\alpha \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{a^2} \int_o^{\frac{\pi}{2}}\int_o^{\infty} (1 - \frac{\theta\cos\alpha}{2a})\,(1 - \frac{\theta\sin\alpha}{2a})\,\theta\, e^{-s\theta}\, d\theta\, d\alpha = (\frac{\varepsilon m}{h_1})^2$$

Or

$$I = \frac{1}{a^2} \int_o^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_o^{\infty} \left[1 - \frac{\theta}{2a}(\sin\alpha+\cos\alpha) + \frac{\theta^2}{4a^2}\sin\alpha\cos\alpha\right] \theta\, e^{-s\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{s^3 a} + \frac{3 \sin\alpha \cos\alpha}{2 s^4 a^2} \right] d\alpha$$

soit

$$I = \frac{1}{s^2 a^2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{sa} + \frac{3}{4 s^2 a^2} \right]$$

Donc s a est tel que

$$\frac{1}{s^2 a^2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{s a} + \frac{3}{4 s^2 a^2} \right] = \left(\frac{\varepsilon\, m_1}{h_1}\right)^2$$

s a est grand ; il vient donc, en première approximation :

$$a \simeq \frac{\sigma\ h_1}{s\ m\ \varepsilon} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

puis

$$\left(\frac{\varepsilon'\, m_1}{h_1}\right)^2 = \frac{1}{s\ a} \left[(1 - e^{-2sa}) \left(1 - \frac{1}{2sa}\right) + e^{-2sa} \right] \simeq \frac{1}{s\ a}$$

Donc $$\left(\frac{\varepsilon'\, m_1}{\sigma\ h_1}\right)^2 \simeq \frac{\varepsilon\ m}{\sigma\ h_1} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

ou

(5) $$\boxed{\varepsilon'^2 \simeq \frac{\sigma\ h_1}{m} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \varepsilon}$$ avec $\varepsilon = \dfrac{|m_{ab} - m|_{max}}{m}$; $\varepsilon' = \dfrac{|m_a - m|_{max}}{m}$.

Supposons que $\frac{\sigma}{m} = 0{,}1$ (ordre de grandeur que l'on rencontrera dans le cas du terrain), $h_1 = 2{,}6$ (d'où $\frac{1}{h_2^2} = 0{,}01$) et $\varepsilon = 10^{-2}$. On obtient $\varepsilon' \simeq 4{,}5\ 10^{-2}$. Donc les fluctuations d'échantillonnage sur les coupes de longueur a sont, dans ce cas, de l'ordre de 4,5 fois supérieures à celles obtenues sur l'échantillon de surface a^2 (on notera qu'avec les valeurs numériques choisies, $a \simeq \frac{32{,}5}{s}$) .

Il est bien entendu possible, en principe, d'effectuer un calcul analogue pour les moments m_{2ab} et m_{2a} ainsi que pour les fonctions de corrélation $R_{ab}(\xi,\eta)$ et $R_a(\xi)$ mais la formulation devient très complexe. D'ailleurs tous ces calculs restent théoriques puisque l'on ne connaît pas les valeurs réelles des moments m_1, m_2 et $R(\xi,\eta)$.

- ETUDE DES PROPRIETES STATISTIQUES DU TERRAIN

L'étude des propriétés statistiques du relief d'une région (de dimensions finies) n'est possible qu'avec l'aide d'un ordinateur, ce qui suppose que l'on échantillonne le terrain, c'est-à-dire que l'on remplace la surface $\Delta z_o(x,y)$ par un quadrillage. On supposera dans ce qui suit que les dimensions de la réalisation $\Delta z_o(x,y)$ et le pas d'échantillonage sont choisis convenablement compte tenu des caractéristiques "fréquencielles" du relief.

Il semble tout naturel a priori d'aborder le problème en définissant un terrain donné $\Delta z_o(x,y)$ comme un échantillon extrait d'une réalisation particulière $z_o(x,y)$ d'un processus aléatoire à deux variable $\{Z(x,y)\}$, stationnaire du second ordre et ergodique, et d'appliquer les méthodes décrites ci-dessus. Toutefois un certain nombre de difficultés apparaissent :

a) L'étude expérimentale de $R_{ab}(\xi,\eta)$ demanderait des temps de traitement sur ordinateur prohibitifs.

b) L'analyse théorique des propriétés statistiques des coupes de terrain à partir des valeurs expérimentales de $[m_{nab}]_o$ et $[R_{ab}(\xi,\eta)]_o$ soulève, ainsi qu'on l'a dit plus haut, des problèmes pratiques et théoriques qu'il semble pour l'instant difficile de surmonter. Or, comme on le verra plus loin, la connaissance des caractéristiques statistiques temporelles des coupes de terrain (moyenne, variance, fonction de corrélation) est absolument indispensable pour bon nombre de raisons pratiques, et notamment pour l'étude de l'intervisibilité entre deux points situés au voisinage du sol ainsi que pour la détermination de l'atténuation de propagation radioélectrique entre un émetteur et un récepteur.

c) Il n'existe pas pour l'instant de méthode satisfaisante pour générer des terrains synthétiques tridimensionnels statistiquement identiques à des terrains réels et, comme on le verra par la suite, nous avons dû nous limiter à la mise au point d'une méthode de génération de coupes de terrains. Il est par conséquent nécessaire, là encore, de connaître avec précision les paramètres statistiques des coupes réelles si l'on veut pouvoir créer des coupes synthétiques ayant des propriétés analogues à celles des coupes réelle

C'est pourquoi nous avons abordé l'étude expérimentale des caractéristiques du relief par le biais des coupes de terrain puisque l'autre approche présentait de graves inconvénients. Cette étude expérimentale de la morphologie du terrain fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE II

ETUDE STATISTIQUE DU RELIEF

MISE EN FORME DES DONNEES

L'étude statistique du relief a été effectué à l'aide de cartes graphiques au $\frac{1}{25\,000}$ ou, à défaut, au $\frac{1}{20\,000}$. Trois régions ont été isies pour cette étude : Orléans (faiblement ondulée), Saulieu (vallon-) et Saint-Flour (montagneuse)[1]. Chacune des 3 régions choisies se pose de 4 cartes numérotées 1 - 2, 3 - 4, 5 - 6 et 7 - 8 (fig. 1).

Le terrain a été échantillonnée avec un pas τ de 125 m (le même on les 2 axes de coordonnées). Une vérification expérimentale, dont il a question plus loin, a montré que le choix d'un pas de 125 mètres était t à fait légitime : l'erreur de quantification est négligeable et les ultats ne diffèrent pas sensiblement, que l'on prenne un pas de 125 m, m ou 375 m.

Pratiquement, la carte est fixée sur une table de lecture "Data lucer" de la firme Telecomputing. Deux roues, commandées manuellement, rmettent le déplacement d'un réticule selon les 2 axes coordonnées x et La rotation des roues provoque l'émission d'impulsions recueillies sur compteur qui assure donc l'affichage automatique des coordonnées du centre réticule. L'altitude z du point (x,y) est lue sur la carte et affichée l'opérateur sur des commutateurs. Le rang de mesure, les coordonnées y et l'altitude sont alors automatiquement envoyées sur une perforatrice de rtes, la perforation étant commandée par l'appui sur une pédale.

Après plusieurs essais, la méthode la plus commode s'est révélée re la suivante : on immobilise la roue x et on déplace le réticule en y, long de la colonne x = cste. On relève les valeurs de y aux points intersection de cette colonne avec les courbes de niveau, dont l'altitude t reportée manuellement sur les commutateurs d'affichage. Lorsque toute la rte a été explorée, on dispose d'un jeu de cartes perforées, chacune con-

---

) Une 4e région, celle de Vesoul, est à l'étude.

tenant les coordonnées x, y, z d'un point. Le paquet de cartes relatif à une même colonne x = cste constitue une coupe de terrain échantillonnée en des points d'ordonnées y_1, y_2, y_3, etc ... Une simple interpolation linéaire permet alors de calculer, à l'aide de l'ordinateur, les altitudes aux points d'ordonnées égales à un nombre entier de fois le pas choisi - ici 125 mètres (l'ensemble des points y = cste constitue une ligne). On dispose ainsi d'un quadrillage complet, chaque carte perforée comportant l'indication du rang de la colonne et du rang de la ligne dont l'intersection définit le point, l'altitude de ce point et le numéro de la carte (fig. 2).

Les points sont donc repérés par un numéro de ligne (que l'on appellera j par la suite) et un numéro de colonne (que l'on désignera par i). Pour les régions d'Orléans et de Saulieu, la carte comporte 216 colonne numérotées de 0 à 215 et 161 lignes numérotées de 0 à 160 ; elles sont donc représentées par 216 x 161 = 34 776 cartes perforées. La région de Saint-Flour comprend 201 colonnes numérotées de 0 à 220 et 135 lignes numérotées de 0 à 134 ; elle est représentée par 201 x 135 = 27 135 cartes perforées. Pour chaque région les cartes 1.2, 3.4, 5.6, 7.8 sont limitées par les colonnes et les lignes indiquées dans le tableau 1 ci-après.

REGION / N° DE LA CARTE	ORLEANS et SAULIEU		SAINT-FLOUR	
	Colonnes	Lignes	Colonnes	Lignes
1.2	0 et 107	80 et 160	0 et 99	67 et 134
3.4	108 et 215	80 et 160	100 et 200	67 et 134
5.6	0 et 107	0 et 79	0 et 99	0 et 66
7.8	108 et 215	0 et 79	100 et 200	0 et 66

TABLEAU 1

La validité de cette méthode d'élaboration repose sur le choix d'un pas petit (125 m). Une vérification a consisté à relever manuellement sur la carte les altitudes des points situés aux sommets du quadrillage, pour un certain domaine,et à les comparer aux altitudes interpolées. On a constaté que les écarts sont presque toujours négligeables, le plus grand d'entre eux ne dépassant pas l'intervalle entre deux courbes de niveau (2,5m à Orléans, 5m à Saulieu et 10m à Saint-Flour).

2 - ETUDE DE LA LOI DE DISTRIBUTION DES ALTITUDES

2-1- CHOIX DES PARAMETRES

Désignons par z_{ij} l'altitude du point courant du terrain (situé à l'intersection de la colonne i et de la ligne j), par p le nombre de colonnes et par q le nombre de lignes. Soit en outre, pour la portion de terrain considérée, z_{max} l'altitude du point le plus haut et z_{min} celle du point le plus bas (fig. 3).

L'étude des propriétés statistiques des altitudes peut s'effectuer à l'aide d'un certain nombre de paramètres tels que :

altitude moyenne : $$m = \frac{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} z_{ij}}{pq}$$

variance : $$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (z_{ij} - m)^2}{pq} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} z_{ij}^2}{pq} - m^2$$

(6) moments centrés d'ordre n : $$M_n = \frac{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (z_{ij} - m)^n}{pq}$$

coefficient de corrélation temporel : $$C_{k_1, k_2} = \frac{\sum_{i=1}^{p-k_1} \sum_{j=1}^{q-k_2} (z_{ij} - m)(z_{i+k_1, j+k_2} - m)}{(p-k_1)(q-k_2)\sigma^2}$$

troncature supérieure : $$T = \frac{z_{max} - m}{\sigma}$$

troncature inférieure : $$T' = \frac{m - z_{min}}{\sigma}$$

ainsi que par deux diagrammes :

- l'histogramme $p_o(z,\Delta z)$, c'est-à-dire la proportion des points z_{ij} dont l'altitude est située dans l'intervalle $(z - \Delta z, z)$: Δz, intervalle élémentaire, est le rapport entre l'intervalle total (z_{min}, z_{max}) et le nombre de classes ;

- la courbe des fréquences cumulées $F_o(Z) = \sum_{z_{min}}^{Z} p_o(z,\Delta z)$, qui donne la proportion des points dont l'altitude est inférieure à Z.

2-2- RESULTATS

En pratique, seuls ont été pris en considération $p_o(z,\Delta z)$, $F_o(z)$, m, σ, M_3 et M_4 (moments centrés d'ordre 3 et 4). Le coefficient de corrélation temporel C_{k_1, k_2} n'a pas été calculé dans le cas général (sa détermination aurait en effet conduit à des temps de calcul sur ordinateur absolument prohibitifs) ; par contre le problème de la corrélation temporelle des altitudes a été abordé dans le cadre de l'étude des coupes de terrain (cf paragraphe 3 ci-après).

En ce qui concerne plus particulièrement la courbe des fréquences cumulées on a utilisé une représentation "gausso-arithmétique", c'est-à-dire que l'axe des ordonnées est gradué selon une loi de Gauss, l'axe des abscisses, sur lequel est portée l'altitude z, étant gradué linéairement en mètres. Dans le cas d'une loi normale, la courbe des fréquences cumulées est donc une droite (droite de Henry).

Les résultats obtenus se traduisent, pour chaque région, par une courbe de fréquences cumulées qui possède une très large plage sensiblement linéaire. D'ailleurs la droite de Henry déterminée à partir de la valeur moyenne et de l'écart-type calculés est pratiquement confondue avec la courbe des fréquences cumulées (figures 4, 5 et 6).

Donc la loi de répartition des altitudes d'une région peut être assimilée à une loi normale. Cette loi est bien entendu tronquée, l'importance de cette troncature étant évaluée en déterminant les rapports T et T'

Le tableau suivant rassemble pour chaque région les valeurs de m, σ, z_{max}, z_{min}, T, T' et $\frac{z_{max} - z_{min}}{\sigma} = T + T'$.

	ORLEANS	SAULIEU	SAINT-FLOUR
m	120,5 m	539 m	972 m
σ	10 m	64 m	87 m
z_{max}	149 m	700 m	1180 m
z_{min}	92 m	330 m	690 m
$\frac{z_{max} - m}{\sigma} = T$	2,85	2,5	2,4
$\frac{m - z_{min}}{\sigma} = T'$	2,85	3,3	3,2
$\frac{z_{max} - z_{min}}{\sigma} = T+T'$	5,7	5,8	5,6

TABLEAU 2

REMARQUE

Les paramètres m et σ correspondent à des valeurs de la moyenne et de l'écart type calculés. Or les paramètres m_o et σ_o de la loi de Gauss qui, après troncature, représente correctement la loi expérimentale sont en fait différents de m et σ [31].

Si la troncature est symétrique ($T = T'$), $m_o = m$; quand à σ_o, il se déduit de σ à l'aide de la formule $\sigma_o = \lambda\sigma$ et de la courbe (théorique) de la figure 7 donnant λ en fonction de T (ou T'). Si l'on désigne en outre par T_o (ou T'_o) la troncature de la loi de Gauss, on a $T_o \sigma_o = T \sigma$ d'où $T_o = T/\lambda$. Si la troncature n'est pas symétrique ($T \neq T'$), m_o, σ_o, T_o et T'_o se déduisent de m, σ, T et T' à l'aide des courbes des figures 8 et 9 et des formules suivantes :

$$K = \left(\frac{T'}{T}\right)^{\varepsilon}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_o = \lambda\sigma \ ; \ m_o = \varepsilon\mu\,\sigma_o + m \\ T_o = \frac{T}{\lambda} + \varepsilon\mu \ ; \ T'_o = \frac{T'}{\lambda} - \varepsilon\mu \end{array}\right\} \text{avec} \quad \begin{array}{l} \varepsilon = 1 \quad \text{si} \quad \frac{T'}{T} \geq 1 \\ \varepsilon = -1 \quad \text{si} \quad \frac{T'}{T} < 1 \end{array}$$

Dans le cas présent T et T' sont voisins de 3, si bien que, à quelques % près environ, m_o et σ_o sont égaux respectivement à m et σ ; ceci signifie que la droite de Henry calculée à partir des paramètres m et σ expérimentaux doit être sensiblement confondue avec la partie linéaire de la courbe des fréquences cumulées expérimentales, ce qui est bien vérifié en pratique.

Outre le calcul de m et σ , on a déterminé les moments centrés M_3 et M_4 d'ordre 3 et 4. Il convient de remarquer que, pour une loi normale, les moments centrés d'ordre impair (et en particulier M_3) sont nuls ; les moments centrés d'ordre pair ne sont pas nuls, mais l'on a $M_4 = 3\ \sigma^4$. On définit habituellement deux coefficients β_1 et β_2 appelés coefficients d'aplatissement, tels que :

(7)
$$\beta_1 = \frac{M_3^2}{M_2^3} = \frac{M_3^2}{\sigma^6} \quad , \quad \beta_2 = \frac{M_4}{M_2^2} = \frac{M_4}{\sigma^4}$$

avec $\beta_1 = 0$ et $\beta_2 = 3$ dans le cas d'une loi normale.

Les coefficients β_1 et β_2 calculés pour les différentes populations s'écartent parfois sensiblement des valeurs théoriques correspondant à la loi de Gauss ; ceci s'explique par le fait que la loi de Gauss est tronquée ($\beta_2 \neq 3$) de manière non symétrique ($\beta_1 \neq 0$). Par exemple, pour les populations constituées de l'ensemble des points d'une région, on a les résultants suivants :

	ORLEANS	SAULIEU	SAINT-FLOUR
β_1	0,305	0,060	0,092
β_2	3,11	2,77	2,44
Signe de M_3	moins	moins	moins

TABLEAU 3

3 - ETUDE DES COUPES DE TERRAIN

3-1- LOI DE DISTRIBUTION DES ALTITUDES

Alors que les populations constituées par l'ensemble des altitudes d'une région obéissent à une loi approximativement gaussienne, tronquée de manière sensiblement symétrique, on constate que les populations constituées par les points d'une coupe quelconque de terrain suivent une loi de répartition assez nettement écartée d'une loi normale. En particulier les rapports $T_c = \frac{z_{max} - m}{\sigma_c}$ et $T'_c = \frac{m - z_{min}}{\sigma_c}$ sont différents l'un de l'autre et en outre ont des valeurs assez faibles dans la plupart des cas : le tableau 4 suivant rassemble les résultats obtenus pour quelques colonnes Nord-Sud choisies dans chacune des régions (l'indice c indique qu'il s'agit de coupes de terrain).

		NUMERO DE COLONNE								
		0	20	40	60	80	100	120	140	160
ORLEANS	T_c	1,65	0,8	0,7	1,1	1,3	1,25	1,2	1,6	1,75
	T'_c	2,1	3,4	2,8	2,7	2,5	1,95	1,9	1,85	2
	$T_c+T'_c$	3,75	4,2	3,5	3,8	3,8	3,2	3,1	3,45	3,75
SAULIEU	T_c	1,65	2,3	2,4	1,56	2	1,9	2	1,85	1,2
	T'_c	2,2	2,8	2,6	3,15	2,1	1,8	2	3,25	2,25
	$T_c+T'_c$	3,85	5,1	5	4,71	4,1	3,7	4	5,1	3,45
SAINT-FLOUR	T_c	1,1	1,1	0,75	1,75	1,3	2,05	1,55	2,1	1,8
	T'_c	2,8	3,6	3,5	2,7	3,7	2,2	1,65	2	1,55
	$T_c+T'_c$	3,9	4,7	4,25	4,45	5	4,25	3,2	4,1	3,35

TABLEAU 4

Quoiqu'il en soit, les valeurs de m_c et σ_c ont été déterminés pour un certain nombre de coupes d'orientation quelconque. Le tableau suivant résume les résultats obtenus sur les coupes Nord-Sud ; il montre en particulier que m_c et σ_c varient de manière importante d'une coupe à l'autre (Δm_c et $\Delta \sigma_c$ représentent les variations de m_c et σ_c entre 2 coupes parallèles distantes de 500 m).

	Valeur moyenne m_c		Ecart - type σ_c		Δm_c	$\Delta \sigma_c$
	min	max	min	max	(max)	(max)
ORLEANS	100 m	137 m	3 m	16 m	2 m	2 m
SAULIEU	390 m	580 m	15 m	90 m	20 m	20 m
SAINT-FLOUR	900 m	1100 m	30 m	130 m	40 m	30 m

TABLEAU 5

3-2- COEFFICIENTS DE CORRELATION

On a défini au paragraphe 2-1 le coefficient de corrélation temporel C_{k_1, k_2} de deux altitudes z_{ij} et $z_{i+k_1 ; j+k_2}$ par la relation :

$$C_{k_1, k_2} = \frac{\sum_{i=1}^{p-k_1} \sum_{j=1}^{q-k_2} (z_{ij} - m)\ (z_{i+k_1, j+k_2} - m)}{(p - k_1)\ (q - k_2)\ \sigma^2}$$

Si l'on désigne par M_{ij} la projection horizontale des points d'altitude z_{ij}, cette formule signifie que l'on a pris en considération tous les couples de points M_{ij}, $M_{i+k_1, j+k_2}$ tels qu'un segment quelconque $M_{ij}\ M_{i+k_1, j+k_2}$ se déduise d'un segment homologue par une translation.

En réalité, pour des considérations pratiques de temps de calcul sur ordinateur, on a étudié seulement le cas de la corrélation sur des coupes de terrain rectilignes : les différents points M_{ij} d'une part et $M_{i+k_1,j+k_2}$ d'autre part sont alors situés sur deux droites parallèles ou confondues. On a, pour cela, considéré deux cas : celui où les deux droites (parallèles ou confondues) sont prallèles à Ox (lignes) et celui où elles sont prallèles à Oy (colonnes).

Considérons tout d'abord deux coupes parallèles distantes de $d = k' \tau$. Si l'on désigne par ℓ un indice courant égal à i ou à j selon que l'on considère la corrélation sur des colonnes ou sur des lignes, par N le nombre de points de chaque coupe (N est égal à p pour les lignes et à q pour les colonnes) et par k le décalage, exprimé en nombre de pas, d'une coupe par rapport à l'autre, on définira le coefficient d'intercorrélation C(k,k') des deux coupes considérées par :

$$C(k,k') = \frac{\sum_{\ell=1}^{N-k} (z_\ell - m_c)\ (z'_{\ell+k} - m'_c)}{(N-k)\ \sigma_c\ \sigma'_c} \tag{8}$$

expression ou z_ℓ et z'_ℓ , m_c et m'_c et σ_c et σ'_c désignent respectivement les altitudes courantes, les valeurs moyennes et les écarts-types relatifs à chacune des coupes.

Dans le cas particulier où k' = o, qui signifie que, en projection horizontale, les deux coupes sont portées par le même axe, on définit le coefficient d'autocorrélation $C_k = C(k,o)$ par la formule :

$$C_k = \frac{\sum_{\ell=1}^{N-k} (z_\ell - m_c)\ (z_{\ell+k} - m_c)}{(N-k)\ \sigma_c^2} \tag{9}$$

Les coefficients C (k, k') et C_k ont été étudiés dans le détail sur des coupes Nord-Sud (colonnes) et Est-Ouest (lignes). L'examen des courbes obtenues [2] montre que les altitudes de points peu éloignés (de l'ordre du km) ne peuvent pas être considérées comme décorrélées. Les coefficients de corrélation varient beaucoup d'une région à l'autre et dépendent fortement de la position et de la direction des coupes. Le tableau suivant, relatif au coefficient d'autocorrélation, donne les limites de la valeur $\rho_o = k_o \tau$ du

décalage, k_o étant tel que $C_{\rho o} = 0,5$ (ρ_o est souvent appelé "rayon d'autocorrélation").

	ORLEANS		SAULIEU		SAINT-FLOUR	
	NS	EO	NS	EO	NS	EO
$(k_o \tau)_{min}$	1100 m	500 m	600 m	750 m	600 m	700 m
$(k_o \tau)_{max}$	4500 m	4100 m	4400 m	4000 m	3600 m	4500 m
$(k_o \tau)_{moyen}$	2800 m	2300 m	2500 m	2400 m	2100 m	2600 m
$\overline{(k_o \tau)_{moyen}}$	2550 m		2450 m		2350 m	

TABLEAU 6

L'ensemble des résultats consignés dans les tableaux 4 à 6 montre que les propriétés statistiques des coupes de terrain ne peuvent se formuler simplement. Toutefois on verra plus loin (paragraphe 4) un moyen de remédier à cette difficulté.

Afin de vérifier si la longueur de pas avait été convenablement choisie, on a examiné ce que deviennent les courbes de corrélation quand on ne tient compte que de un point sur deux, ou trois, ou quatre (ce qui revient à utiliser un pas deux fois, 3 fois ou 4 fois plus long). Le résultat ne change pratiquement pas d'allure lorsque le pas est doublé ou triplé. On constate une légère altération du résultat quand le pas est quadruplé. Donc :

a) le pas a été choisi suffisamment court (125 m) ; à la rigueur il aurait pu être choisi plus long (250 ou 375 m);

b) les écarts assez faibles entre les courbes laissent supposer que les erreurs dues à la quantification sont négligeables.

. REMARQUE

Pour la commodité de l'exposé on désignera parfois, dans la suite, par fonction d'intercorrélation et fonction d'autocorrélation ou de corrélation les fonctions $C(\theta,d)$ et C_θ telles que, pour $\theta=k\tau$, l'on ait :

$$\left| \begin{array}{l} C(\theta,d) = C(k,d) \\ C_\theta = C_k \end{array} \right. \qquad (10)$$

On ne cherchera pas à donner une signification mathématique précise à ces fonctions ; par exemple on pourra admettre que pour les valeurs de θ qui ne sont pas des multiples de τ, les valeurs correspondantes de $C(\theta)$ et C_θ s'obtiennent par interpolation linéaire.

3-3- RECHERCHE DU MOUVEMENT LENT

Comme on l'a vu au paragraphe 1, les altitudes des points d'une coupe de terrain obéissent à une loi de répartition qui, dans de nombreux cas, ne peut-être approximée par une loi de Gauss, même tronquée. Ce résultat est dû en partie au fait que les altitudes sont fortement corrélées entre elles ou,en d'autres termes,qu'elles obéissent à une "tendance".

Il a donc paru intéressant de rechercher la tendance (ou mouvement lent) des coupes de terrain et d'examiner ensuite les propriétés statistiques du mouvement résiduel obtenu en éliminant cette tendance (voir paragraphe 3-4).

Deux méthodes ont été examinées pour la recherche du mouvement lent : la méthode du lissage par moyenne mobile et la méthode du lissage par enveloppe

La 2ème méthode présente un certain nombre d'avantages théoriques par rapport à la première :

a) aucune hypothèse n'est faite sur la structure du mouvement lent ;

b) il n'y a pas besoin de choisir ou d'adapter une longueur de lissage ;

c) il n'est pas nécessaire d'extrapoler aux extrêmités le lissage effectué ;

d) l'accroissement de longueur des coupes de terrain se traduit de façon naturelle par l'introduction de nouveaux termes associés à des fréquences plus basses.

C'est donc le lissage enveloppe qui a été finalement retenu. Le principe en est le suivant :

soit $z_1, z_2 \ldots, z_\ell, \ldots, z_N$ la suite des altitudes d'une coupe. On appelle points limites (en abrégé p. l.) les points où l'altitude admet un maximum ou un minimum relatif ; ils sont définis par :

$$(11)\quad \left|\begin{array}{ll} & z_{\ell-1} \leqslant z_\ell > z_{\ell+1} \\ \text{ou} & \\ & z_{\ell-1} < z_\ell \geqslant z_{\ell+1} \end{array}\right\} \text{pour les maximums}$$

$$\left|\begin{array}{ll} & z_{\ell-1} \geqslant z_\ell < z_{\ell+1} \\ \text{ou} & \\ & z_{\ell-1} > z_\ell \leqslant z_{\ell+1} \end{array}\right\} \text{pour les minimums}$$

En reliant par des segments de droites les p. l. supérieurs d'une part et les p. l. inférieurs d'autre part, on détermine les deux enveloppes de la coupe. La courbe moyenne (f^1) de ces enveloppes représente la coupe lissée, l'indice 1 signifie qu'il s'agit du premier lissage. Afin que f^1 ait une longueur égale à N τ on considère les altitudes aux extrêmités de la coupe comme étant des p. l. :

$$f^1(1) = z_1$$

$$f^1(N) = z_N$$

La procédure de lissage est appliquée autant de fois que nécessaire et finalement on obtient le mouvement lent f et le mouvement résiduel g par différence, c'est-à-dire que $g_\ell = z_\ell - f_\ell$.

L'ondulation lente et le mouvement résiduel correspondant ont été déterminés pour un certain nombre de coupes [2] . Les figures 10, 11, 12 traduisent, à titre d'exemple, les résultats obtenus pour une coupe Nord-Sud de chaque région (on a représenté d'une part l'ondulation lente superposée à la coupe de terrain analysée, d'autre part le mouvement résiduel seul). On constate, et ceci se vérifie d'une manière générale, que l'amplitude des deux phénomènes est du même ordre de grandeur.

REMARQUE

Le procédé de lissage décrit ci-dessus correspond à un filtrage passe-bas. Notons à ce propos qu'il aurait été possible d'effectuer une analyse fréquentielle du terrain à l'aide par exemple de programmes du genre "Transformée de Fourier Rapide".

3-4- PROPRIETES DU MOUVEMENT RESIDUEL

3-4-1- Loi de répartition des altitudes

Les altitudes g_1, g_2 ... g_N du mouvement résiduel suivent pratiquement une loi de distribution gaussienne tronquée. Soient m_{gc}, σ_{gc}, T_{gc}, T'_{gc} les paramètres représentant respectivement la valeur moyenne, l'écart-type, la troncature supérieure et la troncature inférieure des altitudes g d'une coupe résiduelle. Ces paramètres variant d'une coupe à l'autre, on a déterminé pour chaque région et pour différentes directions leurs caractéristiques statistiques, c'est-à-dire : la valeur moyenne (notée M O Y), l'écart-type (noté SIGMA) et la fonction de répartition. Les résultats obtenus pour M O Y et SIGMA varient légèrement avec la direction, ainsi qu'en témoigne le tableau suivant :

		ORLEANS				SAULIEU				SAINT - FLOUR			
		$\lvert m_{gc} \rvert$	σ_{gc}	T_{gc}	T'_{gc}	m_{gc}	σ_{gc}	T_{gc}	T'_{gc}	m_{gc}	σ_{gc}	T_{gc}	T'_{gc}
colonnes	MOY	0,47m	3,27m	2,63	2,23	3,19m	23,8m	2,33	2,56	5,02m	39,3 m	2,23	2,57
	SIGMA	1,07m	1,23m	0,48	0,54	5,84m	7,1m	0,47	0,56	13,6m	11,95m	0,5	0,58
lignes	MOY	0,10m	3,48m	2,79	2,65	3,05m	31,8m	2,38	3,15	3,94m	36,8 m	2,40	2,68
	SIGMA	0,87m	1,07m	0,61	0,53	6,21m	6,7m	0,41	0,64	10,7m	16,4 m	0,30	0,62
moyenne des lignes et colonnes (1)	MOY	0,3 m	3,4 m	2,70	2,45	3,1 m	28 m	2,35	2,85	4,5m	38 m	2,30	2,60
	SIGMA	1 m	1,2m	0,55	0,55	6 m	7 m	0,45	0,60	12 m	14 m	0,40	0,60

TABLEAU 7

Quant à la loi de répartition, elle peut être,là encore, pour chacun de ces quatre paramètres, approximée par une loi de Gauss tronquée (en moyenne la troncature est de l'ordre de ± 2,5 SIGMA).

(1) On a pris des valeurs arrondies.

On remarque sur le tableau précédent que :

a) la valeur absolue $|m_{gc}|$ de la moyenne n'est pas nulle, ce qui signifie que la méthode de lissage n'est pas parfaite ; l'erreur reste toutefois faible, puisqu'elle n'excède pas 3 % de l'amplitude du mouvement résiduel ;

b) l'écart-type σ_{gc} est environ la moitié de l'écart-type moyen des coupes d'origine ; les amplitudes du mouvement résiduel et du mouvement lent sont donc sensiblement égales pour des coupes longues d'une vingtaine de kilomètres ;

c) à Saulieu et Saint-Flour, T'_{gc} est supérieur à T_{gc} (les crêtes sont rabotées) ; à Orléans par contre T'_{gc} est inférieur à T_{gc} (les creux sont comblés) ;

d) la différence d'altitude entre le point le plus haut et le point le plus bas de la coupe résiduelle est comprise entre 4,8 σ_{gc} et 5,5 σ_{gc} (valeur moyenne : 5,1 σ_{gc}).

3-4-2- Coefficient d'autocorrélation

Les courbes d'autocorrélation diffèrent quelque peu d'une coupe à l'autre ; de plus elles tendent vers zéro beaucoup plus rapidement que leurs homologues relatives aux coupes d'origine ; les figure 13, 14, 15 donnent les résultats obtenus sur les trois coupes choisies plus haut à titre d'exemple.

De nombreuses coupes résiduelles ont été étudiées sous l'angle de la corrélation ; pour chacune de ces coupes, on a notamment déterminé quelques points caractéristiques de la fonction d'autocorrélation (que l'on note ψ_θ), à savoir :

θ_1 valeur du retard pour lequel $\psi_\theta = 0,7$

θ_2 " $\psi_\theta = 0$ (premier passage par zéro)

θ_3 " ψ_θ est minimal

θ_4 " $\psi_\theta = 0$ (2e passage par zéro)

$\psi_{\theta 3}$ valeur du minimum

Le tableau suivant résume les résultats moyens obtenus respectivement sur les lignes et les colonnes de chaque régions ; dans ce tableau, où les θ sont exprimés en mètres, MOY et SIGMA ont la même signification qu'au paragraphe 4-1.

		ORLEANS					SAULIEU					SAINT - FLOUR				
		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	$\psi_{\theta 3}$	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	$\psi_{\theta 3}$	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	$\psi_{\theta 3}$
colonnes	MOY	480	2075	3190	5410	-0,28	335	1645	2560	4770	-0,28	440	1635	2500	4745	-0,30
	SIGMA	230	1305	1915	2970	0,14	135	740	1180	2215	0,17	180	920	1150	2675	0,14
lignes	MOY	430	2480	3495	6070	-0,24	380	1625	2570	4625	-0,28	450	2565	3795	6635	-0,34
	SIGMA	175	1625	1660	2920	0,14	135	820	1230	2710	0,13	240	1285	2020	3515	0,20
moyenne sur les lignes et colonnes(valeurs arrondies)	MOY	455	2880	3340	5740	-0,26	360	1635	2565	4700	-0,28	445	2100	3150	5690	-0,32
	SIGMA	200	1465	1790	2945	0,14	135	780	1205	2460	0,15	210	1100	1585	3095	0,17

TABLEAU 8

Il apparaît à la lecture de ce tableau que :

a) MOY θ_1, MOY θ_2, MOY θ_3 et MOY θ_4 varient assez peu en fonction de la direction et la région considérées (l'écart entre les valeurs extrêmes atteint 30 %) ;

b) le premier passage par zéro de la fonction ψ_θ s'effectue pour des distances faibles, ce qui signifie que les altitudes des coupes résiduelles sont dans l'ensemble faiblement corrélées.

REMARQUES

a) Le rayon de corrélation ρ_o est voisin de $2\theta_1$; il est le plus souvent inférieur à 1000m alors qu'il atteint fréquemment 3000m sur les coupes d'origine.

b) Comme on le verra au chapitre suivant, la connaissance de la fonction d'autocorrélation ψ_θ est indispensable pour la génération de coupes de terrain synthétiques. Toutefois, comme il n'est pas nécessaire, en pratique, que ψ_θ soit déterminé avec une grande précision (du moins pour les faibles valeurs de ψ_θ), on a utilisé une fonction de corrélation moyenne unique pour les trois régions (figure 16) : à cette fonction ψ_θ correspondent les valeurs suivantes :

θ_1 = 140 m θ_3 = 3 500 m $r_{\theta 3}$ = - 0,31

θ_2 = 2 000 m θ_4 = 5 000 m

En conclusion de ce qui précède il apparaît que le mouvement résiduel des coupes de terrain est assez homogène du point de vue statistique. Plus précisément les paramètres statistiques des coupes résiduelles (m_{gc}, σ_{gc}, ψ_k) obéissent eux mêmes à des lois de probabilité gaussienne dont les caractéristiques dépendent peu de la position de la coupe de terrain et de la région.

3-5- REMARQUES CONCERNANT LE COEFFICIENT DE CORRELATION C_k DES ALTITUDES

3-5-1-

Soit $z_1, z_2, \ldots z_N$ la suite des altitudes d'une coupe de terrain, deux points d'altitudes z_ℓ et $z_{\ell+1}$ étant distants du pas τ. Soit en outre $s_\ell = \frac{z_{\ell+1} - z_1}{2}$ la pente locale du terrain.

La pente s suit une loi normale tronquée ; elle a pour moyenne et variance :

$$m_s = \frac{\sum_1^{N-1} s_\ell}{N-1} = \frac{z_N - z_1}{(N-1)\tau}$$

$$\sigma_s^2 = \frac{\sum_1^{N-1} s_\ell^2}{N-1} - m_s^2 = \frac{\sum_1^{N-1} (z_{\ell+1} - z_1)^2}{(N-1)\tau^2} - m_s^2$$

soit encore

$$\sigma_s^2 = \frac{\sum_1^{N-1} z_\ell^2 + \sum_2^{N} z_\ell^2 - 2 \sum_1^{N-1} z_\ell \, z_{\ell+1}}{(N-1)\,\tau^2} - m_s^2$$

Or $$\frac{\sum_1^{N-1} z_\ell^2}{N-1} \simeq \frac{\sum_2^{N} z_\ell^2}{N-1} \simeq \sigma_c^2 + m_c^2$$

m_c et σ_c étant la valeur moyenne et l'écart-type des altitudes z_ℓ de la coupe

En outre :

$$C_k = \frac{\sum_1^{N-k} (z_\ell - m_c)\,(z_{\ell+k} - m_c)}{(N-k)\,\sigma_c^2} \simeq \frac{\sum_1^{N-k} z_\ell \, z_{\ell+k}}{(N-k)\,\sigma_c^2} - \frac{m_c^2}{\sigma_c^2}$$

d'où

$$C_1 = \frac{\sum_1^{N-1} z_\ell \, z_{\ell+1}}{(N-1)\,\sigma_c^2} - \frac{m_c^2}{\sigma_c^2}$$

Il vient donc

$$\sigma_s^2 \simeq \frac{2\sigma_c^2 (1-C_1)}{\tau^2} - m_s^2 \qquad (12)$$

Si τ tend vers zéro, C_1 tend vers 1 mais $\frac{1 - C_1}{\tau^2}$ tend nécessairement vers une valeur μ^2 finie et supérieure à $\frac{m_c^2}{2\sigma_c^2}$ puisque σ_s^2 est nécessairement fini et non nul. Donc au voisinage de $\tau = 0$, on a, d'après la relation (12) :

$$C_1 = 1 - \mu^2 \tau^2 \qquad (13)$$

Cette formule peut encore être considérée comme valable pour $\tau = 125$ m et l'on peut donc écrire :

$$\sigma_s^2 \sim 2\mu^2 \sigma_c^2 - m_s^2 \qquad (14)$$

3-5-2-

Décomposons maintenant la coupe en un mouvement lent et un mouvement résiduel superposé. Alors :

$$z_\ell = f_\ell + g_\ell$$

où f_ℓ désigne l'altitude courante du mouvement lent
et g_ℓ désigne l'altitude courante du mouvement résiduel.

Si en outre on représente par ϕ_k et ψ_k respectivement les coefficients de corrélation correspondant à ces deux mouvements, et par σ_f^2 et σ_g^2 les variances associées, on obtient :

$$\sigma_c^2 \; C_k = \frac{\sum_1^{N-k} z_\ell \; z_{\ell+k}}{N-k} - m_c^2$$

$$\sigma_{fc}^2 \; \phi_k = \frac{\sum_1^{N-k} f_\ell \; f_{\ell+k}}{N-k} - m_{fc}^2 \simeq \frac{\sum_1^{N-k} f_\ell \; f_{\ell+k}}{N-k} - m_c^2$$

$$\sigma_{gc}^2 \; \psi_k = \frac{\sum_1^{N-k} g_\ell \; g_{\ell+k}}{N-k} - m_{gc}^2 \simeq \frac{\sum_1^{N-1} g_\ell \; g_{\ell+k}}{N-1}$$

en remarquant que $m_{gc} \simeq 0$ en pratique pour le mouvement résiduel.

Des relations ci-dessus on tire :

$$\sigma_c^2 \; C_k = \frac{\sum_1^{N-1} (f_\ell + g_\ell)\,(f_{\ell+k} + g_{\ell+k})}{N-k} - m_c^2$$

ou

$$\sigma_c^2 \; C_k = \sigma_{fc}^2 \; \psi_k + \frac{\sum_1^{N-k} (f_\ell \; g_{\ell+k} + f_{\ell+k} \; g_\ell)}{N-k}$$

Or, on a pu constater expérimentalement sur les échantillons utilisés que f_ℓ et g_ℓ sont tels que le terme :

$$\frac{\sum_1^{N-k} (f_\ell \; g_{\ell+k} + f_{\ell+k} \; g_\ell)}{N-k}$$

est pratiquement égal à zéro. Par suite on peut écrire :

(15) $$\boxed{\sigma_c^2 \; C_k \simeq \sigma_{fc}^2 \; \phi_k + \sigma_{gc}^2 \; \psi_k}$$

quel que soit k supérieur ou égal à zéro.

Cette relation est à rapprocher de celle que l'on obtiendrait en théorie des probabilités en admettant que la coupe de terrain soit la superposition d'un mouvement lent et d'un mouvement résiduel stochastiquement indépendants.

Par ailleurs si on désigne par η_ℓ et ξ_ℓ les pentes locales associées à f_ℓ et g_ℓ, on a :

$$\sigma_\eta^2 = \frac{2\,\sigma_{fc}^2\,(1-\Phi_1)}{\tau^2} - m_\eta^2$$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{2\,\sigma_{gc}^2\,(1-\psi_1)}{\tau^2} - m_\xi^2$$

m_ξ est pratiquement nul puisque $m_g \simeq 0$ et en outre, dès que N est suffisamment grand, m_η peut être lui aussi assimilé à zéro (ainsi que m_s d'ailleurs) On obtient alors, à partir de (15) :

(16)
$$\frac{\sigma_s^2}{1-C_1}\,C_k = \frac{\sigma_\eta^2}{1-\Phi_1}\,\Phi_k + \frac{\sigma_\xi^2}{1-\psi_1}\,\psi_k$$

L'ensemble des formules écrites ci-dessus permet de raisoner indifféremment sur les altitudes ou sur les pentes.

4 - TENDANCES DU TERRAIN

4-1- GENERALITES

On a vu plus haut qu'une coupe de terrain pouvait être considérée comme la superposition d'une ondulation lente et d'un mouvement résiduel quasi-aléatoire, de fréquence plus élevée. De la même manière la totalité d'une région peut être représentée par la superposition d'une surface lissante et d'un mouvement résiduel ; cette surface peut être définie comme étant celle qui passe par les ondulations lentes de l'ensemble des coupes de terrain parallèles à une direction donnée quelconque (Nord-Sud par exemple).

L'examen des coupes de terrain parallèles à une direction donnée montre par ailleurs que les caractéristiques de l'ondulation lente, ainsi que l'allure de la fonction d'autocorrélation, varient de manière assez sensible avec l'orientation des coupes. Il est donc naturel de définir, pour chaque direction, ce que l'on peut appeler la "tendance" du terrain. Il faut noter d'ailleurs qu'il y a généralement deux directions privilégiées : la direction des lignes de crêtes pour laquelle la fonction de corrélation tend lentement vers zéro (figure 17-a) et la direction perpendiculaire aux lignes de crêtes pour laquelle la fonction de corrélation décroit rapidement et en outre présente souvent des oscillations (figure 17-b) ; dans le premier cas ρ_o est donc grand (généralement supérieur à 1,5 ou 2 km) et dans le deuxième cas ρ_o est faible (de l'ordre de 1 à 1,5 km).

4-2- RESULTATS

Pour déterminer la tendance du terrain dans une direction donnée $\vec{Ou}$, il est commode de calculer l'altitude moyenne m des coupes pq perpendiculaire à $\vec{Ou}$ (figure 18), ainsi éventuellement que l'écart type σ. Remarquons que, pour garder à m et σ toute leur signification, il est nécessaire que la longueur des coupes considérées soit suffisamment grande ; la longueur minimale a a' (ou b b'), AB et α sont liées par relation simple : pratiquement, pour $|\alpha| = \frac{\pi}{4}$, AB a été choisi égal au plus petit côté de la région considérée, si bien que a a' $\# \frac{AB}{\sqrt{2}}$.

Grâce au procédé décrit ci-dessus, on a pu déterminer la tendance du terrain pour 4 directions particulières (mais non priviligiées) : Nord-Sud, Est-Ouest, Sud Est-Nord Ouest, Sud Ouest-Nord Est. Les figures 19 à 21, relatives à la seule direction Nord-Sud, montrent que les valeurs de m et σ fluctuent de manière importante en fonction de la position M sur le segment AB. Afin d'éliminer dans la mesure du possible les fluctuations dues à l'échantillonnage on a lissé les courbes obtenues à l'aide du procédé de lissage par enveloppe décrit plus haut.

REMARQUE

La tendance du terrain est un mouvement extrêmement lent ; par conséquent, en quadrillant le terrain avec une maille assez lâche, on élimine les fluctuations rapides tout en conservant les fluctuations lentes, c'est-à-dire la tendance. Les dimensions optimales de la maille sont de quelques kilomètres.

4-3- FORMULATION

Essayons d'exprimer mathématiquement le procédé défini au paragraphe 4-2 . Soit : $z_{ij} = f_{ij} + g_{ij}$ l'altitude du point situé à l'intersection de la $i^{ème}$ colonne et de la $j^{ème}$ ligne, f_{ij} et g_{ij} étant respectivement les altitudes au point (i,j) de la tendance et du mouvement résiduel.

Posons :

(17)

$$m_i = \frac{\sum_{j=1}^{q} z_{ij}}{q}$$ altitude moyenne de la colonne i

$$m_j = \frac{\sum_{i=1}^{p} z_{ij}}{p}$$ altitude moyenne de la ligne j

p et q étant respectivement le nombre de colonnes et de lignes du terrain.

Selon la définition donnée en 4-2 , l'ensemble des m_i est caractéristique de la tendance moyenne du terrain dans la direction Est-Ouest et l'ensemble des m_j est de la même manière caractéristique de la tendance moyenne du terrain dans la direction Nord-Sud.

Il y a lieu de remarquer que les directions Nord-Sud et Est-Ouest ont été choisies pour la commodité de l'exposé et de la formulation mathématique mais que le raisonnement resterait valable pour n'importe quelle autre direction.

Comme z_{ij} est la somme de deux termes f_{ij} et g_{ij} dont l'un, g_{ij}, est à moyenne presque nulle, on obtient :

(18)
$$m_i \simeq \frac{\sum_{j=1}^{q} f_{ij}}{q}$$
$$m_j \simeq \frac{\sum_{i=1}^{q} f_{ij}}{p}$$

De la même manière, posons :

(19)
$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{q} z_{ij}^2}{q} - m_i^2$$
$$\sigma_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p} z_{ij}^2}{p} - m_j^2$$

Il vient :

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{q} (f_{ij}+g_{ij})^2}{q} - m_i^2 \simeq \frac{\sum_{j=1}^{q} (f_{ij}-m_i)^2}{q} + \frac{\sum_{j=1}^{q} g_{ij}^2}{q}$$

$$\sigma_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p} (f_{ij}+g_{ij})^2}{q} - m_j^2 \simeq \frac{\sum_{i=1}^{p} (f_{ij}-m_j)^2}{p} + \frac{\sum_{i=1}^{p} g_{ij}^2}{p}$$

puisque l'expérience montre que f_{ij} et g_{ij} sont des grandeurs très peu corrélées. Si l'on pose en outre :

(20)

$$\sigma_{fi}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{q} (f_{ij} - m_i)^2}{q}$$

$$\sigma_{fj}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p} (f_{ij} - m_j)^2}{p}$$

$$\sigma_{gi}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{q} g_{ij}^2}{q} \text{ à } \overline{g_{ij}}^2 \text{ près}$$

$$\sigma_{gj}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p} g_{ij}^2}{p} \text{ à } \overline{g_{ij}}^2 \text{ près}$$

(notations équivalentes à celles du paragraphe 3, où l'on a remplacé c par i ou j selon qu'il s'agit de colonnes ou de lignes), on obtient évidemment

(21)

$$\sigma_i^2 = \sigma_{fi}^2 + \sigma_{gi}^2$$

$$\sigma_j^2 = \sigma_{fj}^2 + \sigma_{gj}^2$$

Cherchons maintenant les moments des deux 1er ordres relatifs aux moyennes Est-Ouest et Nord-Sud, c'est-à-dire $\overline{m_i}$, $\overline{m_j}$, $\left[\overline{m_i^2} - (\overline{m_i})^2\right]$, $\left[\overline{m_j^2} - (\overline{m_j})^2\right]$.

Tout d'abord :

$$\overline{m_i} = \overline{m_j} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} f_{ij}}{p\,q}$$

soit

(22) $$\boxed{\overline{m_i} \simeq \overline{m_j} \simeq m}$$

m étant la valeur moyenne de l'ensemble des altitudes de terrain (puisque en pratique $\overline{g_{ij}} \simeq 0$)

De plus on a :

$$m_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{q} f_{ij}^2}{q} - \sigma_{fi}^2$$

$$\overline{m_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} f_{ij}^2}{p\,q} - \frac{\sum_{j=1}^{q} f_i^2}{q} \simeq \sigma_f^2 + m^2 - \frac{\sum_{j=1}^{q} \sigma_{fi}^2}{q}$$

Donc $$\overline{(m_i - m)^2} \simeq \sigma_f^2 - \sigma_{fi}^2$$

De même $$\overline{(m_j - m)^2} \simeq \sigma_{f_.}^2 - \overline{\sigma_{fj}^2}$$

σ_f^2 étant la variance de la tendance pour l'ensemble du terrain, σ_{fi}^2 et σ_{fj}^2 étant, quant à eux, les variances des mouvements lents de la $i^{ème}$ colonne et de la $j^{ème}$ ligne.

Les deux formules précédentes se résument en :

(23) $$\boxed{\overline{(m_i - m)^2} + \overline{\sigma_{fi}^2} \simeq \overline{(m_j - m)^2} + \overline{\sigma_{fj}^2} \simeq \sigma_f^2}$$

En combinant les formules (21) et (23) on tire en outre :

$$\overline{(m_i - m)^2} + \overline{\sigma_i^2} \simeq \sigma_f^2 + \frac{\sum_{i=1}^{p} \sigma_{gi}^2}{p}$$

$$\overline{(m_j - m)^2} + \sigma_j^2 \simeq \sigma_f^2 + \frac{\sum_{j=1}^{q} \sigma_{gj}^2}{q}$$

or $\frac{\sum_{i=1}^{p} \sigma_{gi}^2}{p} \simeq \frac{\sum_{j=1}^{q} \sigma_{gj}^2}{q} \simeq \frac{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} g_{ij}^2}{p\,q} \simeq \sigma_g^2$, variance du mouvement résiduel pour l'ensemble du terrain, et $\sigma_f^2 + \sigma_g^2 \simeq \sigma^2$, variance du terrain.

Donc :

(24) $$\overline{(m_i - m)^2} + \overline{\sigma_i^2} \sim \overline{(m_j - m)^2} + \overline{\sigma_j^2} \sim \sigma^2$$

Les formules (23) et (24) montrent que la somme de la variance de la tendance moyenne dans une direction et de la moyenne des variances relatives aux coupes de terrain perpendiculaire à cette direction (ou à leur mouvement lent) est un invariant.

Remarquons que la formule (23) ne relie pas directement la variance de la tendance moyenne dans une direction et la moyenne des variances relatives au mouvement lent des coupes de terrain parallèles à cette direction. Or il serait intéressant de déterminer $\overline{\sigma_{fi}^2}$ par exemple, connaissant $\overline{(m_j - m)^2}$. Posons alors :

(25) $$K^2 = \sigma_f^2 - \overline{(m_i - m)^2} - \overline{(m_j - m)^2}$$

Il vient, dans ces conditions :

(26) $$\overline{\sigma_{fi}^2} \simeq \overline{(m_j - m)^2} + K^2$$

$$\overline{\sigma_{fj}^2} \simeq \overline{(m_i - m)^2} + K^2$$

Donc d'une manière générale la différence entre la variance de la tendance moyenne dans une direction et la moyenne des variantes relatives au mouvement lent des coupes de terrain parallèles à cette direction est aussi un invariant.

Cette propriété sera utilisée plus loin pour la génération de coupes de terrain parallèles à une direction donnée. En effet on remarque que l'on peut écrire :

(27)

$$\sigma_i^2 = \sigma_{gi}^2 + \lambda_i \; a \; \overline{(m_j - m)^2}$$

$$\sigma_j^2 = \sigma_{gj}^2 + \mu_j \; b \; \overline{(m_i - m)^2}$$

avec

$$a \simeq 1 + \frac{K^2}{(m_j - m)^2}$$

(28)

$$b \simeq 1 + \frac{K^2}{(m_i - m)^2}$$

$$\overline{\lambda_i} = \overline{\mu_i} = 1$$

5 - CONCLUSION

En définitive l'étude expérimentale de la morphologie du terrain a montré l'intérêt de considérer un terrain comme la superposition d'un mouvement lent et d'un mouvement résiduel gaussiens tronqués.

Le mouvement lent varie beaucoup d'une région à l'autre et, pour une même région, il est très fortement anisotrope ; il caractérise la tendance du terrain.

Le mouvement résiduel, lui, est sensiblement isotrope ; il dépend relativement peu de la région, à une affinité près des altitudes. Pour les régions étudiées, de dimension 20 x 25 Km environ, l'amplitude du mouvement résiduel est d'ailleurs du même ordre de grandeur que celle du mouvement lent.

CHAPITRE III

MODELE MATHEMATIQUE DU RELIEF

1 - INTRODUCTION

L'examen des résultats expérimentaux exposés au chapitre précédent suggère d'adopter un modèle mathématique du relief constitué par la somme de deux fonctions aléatoires indépendantes et de domaines de fréquences disjoints. La première, de très basse fréquence, correspond à la tendance ; la seconde, de fréquence élevée, correspond au mouvement résiduel.

Compte tenu de la dimension relativement réduite des terrains étudiés (20x25 km^2) vis à vis de la pseudo-longueur d'onde de leur tendance (de l'ordre de la dizaine de kilomètres), il n'a pas été possible de vérifier la stationnarité du terme en basse fréquence ni même de préciser convenablement ses caractéristiques statistiques. C'est pourquoi, du moins dans le cas des terrains de faible dimension (quelques dizaines de kilomètres de côté), il parait préférable, au niveau de la simulation, de traiter le mouvement lent comme une fonction certaine (obtenue expérimentalement). Toutefois, pour des terrains plus vastes (quelques centaines de kilomètres de côté), il serait sans doute possible de garder un modèle purement aléatoire de la tendance.

En ce qui concerne le terme à fréquence élevée, il paraît par contre tout à fait légitime de le représenter à l'aide d'une fonction aléatoire que l'on pourra supposer stationnaire, ergodique, isotrope et de moyenne nulle (la dispersion constatée sur les moyennes temporelles relatives aux coupes de terrain n'a rien de prohibitif : elle est très probablement due à la faible taille des échantillons, ainsi qu'on l'a montré au chapitre I).

2 - DEFINITION DU MODELE MATHEMATIQUE

2-1- LOI DE DISTRIBUTION DES ALTITUDES z(x,y), f(x,y) et g(x,y)

Soit $(\mathcal{T}_o)$ un terrain réel et $(\mathcal{T}_1)$, $(\mathcal{T}_2)$, ..., $(\mathcal{T}_\ell)$, ... l'ensemble des terrains statistiquement identiques au terrain $(\mathcal{T}_o)$ considéré, lequel en constitue une réalisation particulière. Désignons par $M_\ell(x,y)$ le point du terrain $(\mathcal{T}_\ell)$, d'altitude $z_\ell(x,y)$, dont les coordonnées sont x et y , par $f_\ell(x,y)$ l'altitude du point correspondant de la tendance et par $g_\ell(x,y)$ l'altitude résiduelle homologue (de moyenne nulle[1]). Si l'on représente par $U(t-t_o)$ la fonction de Heaviside, les variables aléatoires centrées et normées $\frac{z(x,y)-m}{\sigma}$, $\frac{f(x,y)-m}{\sigma_f}$, $\frac{g(x,y)}{\sigma_g}$ obéissent sensiblement à des lois de Gauss tronquées, indépendantes de x et y (stationnarité), c'est-à-dire de la forme

(29) $$p(t) = \frac{\alpha_x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[U(t+T'_x) - U(t-T_x) \right]$$

Dans cette formule, les termes T_x et T'_x de troncature sont égaux à T et T' ou T_f et T'_f ou encore T_g et T'_g selon la v.a considérée (c'est-à-dire z,f ou g). α_x est un coefficient de normalisation tel que :

$$\int_{T'_x}^{T_x} p(t)\, dt = \int_{T'_x}^{T_x} \frac{\alpha_x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

d'où

(30) $$\alpha_x = \frac{1}{G(T_x) + G(T'_x)}$$

G(X) étant la fonction de Galton : $G(X) = \int_0^X \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. En pratique α_x est voisin de 1 puisque T_x et T'_x sont de l'ordre de 2,5.

Notons que, d'après l'hypothèse d'ergodicité, p(t) est identique à la loi de distribution temporelle des altitudes $z_\ell(x,y)$, $f_\ell(x,y)$ et $g_\ell(x,y)$ d'une réalisation particulière $(\mathcal{T}_\ell)$ et notamment à celle des altitudes $z_o(x,y)$, $f_o(x,y)$ et $g_o(x,y)$ du terrain réel $(\mathcal{T}_o)$, à la réserve près que les dimensions de $(\mathcal{T}_o)$ sont finies (voir chapitre I).

---

(1) ce qui signifie que $E[z(x,y)] = E[f(x,y)] = m$

2-2- FONCTION DE CORRELATION DE z(x,y), f(x,y) et g(x,y)

Considérons par ailleurs les couples de points $M_\ell(x,y)$ $M'_\ell(x,y)$ tels que les différences $x' - x = \xi$ et $y' - y = \eta$ soient constantes. On définira les fonctions d'autocorrélation, normées et centrées, des fonctions aléatoires $\{z(x,y)\}$, $\{f(x,y)\}$ et $\{g(x,y)\}$ par les relations :

(31)

$$C(\xi, \eta) = \frac{E\{[z(x,y) - m] \cdot [z(x+\xi, y+\eta) - m]\}}{\sigma^2}$$

$$\phi(\xi, \eta) = \frac{E\{[f(x,y) - m] \cdot [f(x+\xi, y+\eta) - m]\}}{\sigma_f^2}$$

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{E[g(x,y) \cdot g(x+\xi, y+\eta)]}{\sigma_g^2}$$

D'après l'hypothèse de stationnarité les fonctions $C(\xi,\eta)$, $\phi(\xi,\eta)$ et $\psi(\xi,\eta)$ ne dépendent pas des valeurs de x et y ; par ailleurs, d'après l'hypothèse d'ergodicité, ces trois fonctions sont identiques (avec la même réserve que ci-dessus) aux trois fonctions d'autocorrélation temporelles relatives à n'importe laquelle des réalisations particulières ($\mathcal{C}_\ell$) et notamment au terrain réel ($\mathcal{C}_o$).

Par ailleurs l'hypothèse d'isotropie qui a été retenue pour le terrain résiduel conduit à écrire :

(32)

$$\psi(\xi, \eta) = \psi_\theta$$

avec $\theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$

c'est-à-dire que la fonction d'autocorrélation ne dépend pas de la direction du segment M(x,y) . M'(x,y) (ni d'ailleurs, comme on a pu le constater expérimentalement, du type de terrain : la courbe de la figure 16 représente une bonne approximation, la fonction ψ_θ commune aux trois régions).

De la même manière qu'au chapitre II, formule (15), $C(\xi,\eta)$ est relié à $\phi(\xi,\eta)$ et $\psi(\xi,\eta)$ par la relation :

$$\sigma^2 C(\xi, \eta) = \sigma_f^2 \ \phi(\xi, \eta) + \sigma_g^2 \ \psi(\xi, \eta)$$

d'où

(33)
$$C(\xi, \eta) = \frac{\sigma_f^2}{\sigma^2} \phi(\xi, \eta) + \frac{\sigma_g^2}{\sigma^2} \psi_\theta$$

Par suite un terrain ($\mathcal{T}$) pourra être représenté comme la superposition d'une tendance analytique f(x,y)-qui, en pratique, peut être obtenue par un quadrillage lâche du terrain réel ($\mathcal{T}_o$) puis par un lissage sur les altitudes des sommets du quadrillage-à laquelle se superpose une fonction aléatoire $\{g(x,y)\} = \sigma_g \ . \ \{t(x,y)\}$. La loi de distribution de t est donnée par la formule (29), avec $T_x = T_g$, $T'_x = T'_g$ et $\alpha_x = \frac{1}{G(T_g) + G(T'_g)}$, et sa fonction d'autocorrélation est $\psi_\theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$

2-3- REPRESENTATION DES COUPES DE TERRAIN

Considérons maintenant une coupe de terrain quelconque, définie comme au chapitre I, paragraphe 3, c'est-à-dire par l'intersection de $z_o(x,y)$ avec un plan vertical y=P(x). Cette coupe se décompose elle aussi en un mouvement lent, intersection de $f_o(x,y)$ avec y=P(x), et un mouvement résiduel intersection de $g_o(x,y)$ avec y=P(x).

Si l'on considère plus particulièrement le mouvement résiduel on constate, ainsi qu'on l'avait prévu au chapitre I, que les paramètres de la statistique temporelle m_{gc}, σ_{gc}, T_{gc}, et T'_{gc} fluctuent notablement d'une coupe à l'autre et par conséquent peuvent différer sensiblement des valeurs $m_g = o$, σ_g, T_g et T'_g relatives à la totalité de l'échantillon.

Ces paramètres obéissent eux mêmes, ainsi qu'on l'a vu au chapitre II, à des lois de Gauss tronquées et l'on a, en première approximation, pour l'ensemble des trois régions étudiées.

(34)
$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\text{MOY } |m_{gc}|}{\sigma} \simeq 0{,}04 & \dfrac{\text{SIGMA } |m_{gc}|}{\sigma} \simeq 0{,}11 \\
\dfrac{\text{MOY } \sigma_{gc}}{\sigma} \simeq 0{,}4 & \dfrac{\text{SIGMA } \sigma_{gc}}{\sigma} \simeq 0{,}13 \\
\text{MOY } T_{gc} \simeq 2{,}45 & \text{SIGMA } T_{gc} \simeq 0{,}47 \\
\text{MOY } T'_{gc} \simeq 2{,}62 & \text{SIGMA } T'_{gc} \simeq 0{,}58
\end{array}$$

où σ est l'écart-type de l'ensemble du terrain considéré.

Si le lissage était parfait et si l'altitude résiduelle obéissait rigoureusement à une loi de Gauss tronquée, on devrait avoir $m_{gc} = 0$ et par suite $T_{gc} = T'_{gc}$, du moins pour les coupes suffisamment longues. Or tel n'est pas le cas, ce qui signifie notamment qu'il existe une relation entre m_{gc}, σ_{gc}, T_{gc} et T'_{gc} (voir paragraphe 2-1-, chapitre II).

Quoiqu'il en soit on fera l'hypothèse simplificatrice supplémentaire : $m_{gc} = 0$, $T_{gc} = T'_{gc}$, avec :

$$(35) \quad \left| \begin{array}{l} \text{MOY} \quad T_{gc} = \text{MOY} \quad T'_{gc} \simeq 2{,}53 \\ \\ \text{SIGMA } T_{gc} = \text{SIGMA } T'_{gc} \simeq 0{,}53 \end{array} \right.$$

La v.a normée et centrée $t[x,P(x)] = \frac{g[x,P(x)]}{\sigma_{gc}}$ a une densité de probabilité donnée par la formule (29), avec $T_x = T'_x = T_{gc}$ et $\alpha_x = \frac{1}{2G\,(T_{gc})}$. La densité de probabilité fluctue d'une coupe à l'autre ; pour une coupe donnée on obtient l'expression de cette densité en tirant au hasard une valeur σ_{gc} dans la loi

$$\frac{1}{2G\,(0{,}325\sigma)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,.\,0{,}13\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_{gc} - 0{,}4\,\sigma}{0{,}13\,\sigma}\right]^2} \left[U(\sigma_{gc}-0{,}075\sigma) - U(\sigma_{gc}-0{,}725\sigma)\right]$$

et une valeur T_{gc} dans la loi

$$\frac{1}{2G\,(2{,}5)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,.\,0{,}53}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{T_{gc} - 2{,}53}{0{,}53}\right]^2} \left[U(T_{gc}-1{,}15) - U(T_{gc}-3{,}91)\right]$$

En pratique d'ailleurs on peut remplacer le terme $2G(2{,}5)$ par 1 (au lieu de 0,9876) et, dès que σ dépasse 7 ou 8 mètres, on peut de même faire $2G(0{,}325\sigma) = 1$.

Quant à la fonction de corrélation temporelle de $t[x,P(x)]$, on admettra qu'elle est toujours identique à ψ_θ (θ étant le décalage de la coupe par rapport à elle même), bien que dans la réalité la courbe correspondante puisse différer assez sensiblement de celle qui est représentée sur la figure 16.

CHAPITRE IV

ETUDE D'UN MODELE DE SIMULATION DES COUPES DE TERRAIN

1 - INTRODUCTION

Au chapitre précédent on a vu que chaque coupe de terrain pouvait se décomposer en un mouvement lent défini analytiquement et un mouvement résiduel que l'on peut caractériser de manière purement statistique.

Cette propriété est fondamentale ; elle va servir pour la génération, par une méthode de simulation, de coupes de terrain "synthétiques" identiques, du point de vue statistique, à des coupes réelles. La méthode consiste à prendre la véritable tendance de la coupe que l'on veut générer et à lui superposer une ondulation résiduelle obtenue grâce à un algorithme dont les données d'entrée sont les caractéristiques statistiques du terrain résiduel (lesquelles, rappelons le, peuvent être considérées comme stables, du moins si l'on considère un terrain d'environ 20x25 km^2, et par conséquent peuvent être déterminées par "prélèvement").

L'intérêt d'un modèle de génération de coupes de terrain tel que celui qui est proposé ici est double.

a) La connaissance détaillée d'un terrain de grandes dimensions nécessite un très important travail de relevé sur des cartes ayant une échelle d'au plus $\frac{1}{25\ 000}$ (ou à l'extrême rigueur $\frac{1}{50\ 000}$) et par ailleurs conduit, pour stocker toutes les informations ainsi obtenues, à un encombrement prohibitif de la mémoire du calculateur. Or pour beaucoup de problèmes, tels que ceux concernant la visibilité, il suffit en pratique d'avoir des indications précises sur les grands mouvements de terrain (c'est-à-dire en définitive la tendance), les ondulations résiduelles pouvant, quant à elles, être définies de manière moins fine (en effet l'anisotropie et l'inhomogénéité du terrain sont essentiellement dûes à la tendance).

b) De toute façon, il peut arriver que l'on n'ait à sa disposition que des cartes à grandes échelle ($\frac{1}{250\ 000}$ par exemple) qui permettent tout au plus de préciser la tendance et de donner des indications sommaires sur les mouvements fins du relief.

2 - GENERATION DU MOUVEMENT RESIDUEL D'UNE COUPE DE TERRAIN DONT LES EXTREMITES SONT DES POINTS QUELCONQUES

Soit $F_1(g)$ la loi de répartition (gaussienne, de moyenne nulle et d'écart-type σ_g) des altitudes g_i de la coupe résiduelle, et ψ_k leur coefficient de corrélation ; soit en outre :

$$\psi = \begin{Vmatrix} 1 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \cdots\cdots\cdots & \psi_N \\ \psi_1 & 1 & \psi_1 & \psi_2 & \cdots\cdots\cdots & \psi_{N-1} \\ \psi_2 & \psi_1 & 1 & \psi_1 & \cdots\cdots\cdots & \psi_{N-2} \\ \psi_3 & \psi_2 & \psi_1 & 1 & \cdots\cdots\cdots & \psi_{N-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \psi_N & \psi_{N-1} & \psi_{N-2} & \psi_{N-3} & & 1 \end{Vmatrix}$$

la matrice formée à partir des coefficients de corrélation ψ_k (où k est le retard exprimé en nombre de fois le pas τ de la coupe).

Si l'on tire au hasard un ensemble G' de N variables aléatoires indépendantes g'_1, g'_2, g'_3, ..., g'_N obéissant à la loi normale F_1 et si l'on effectue la transformation $G = G'S$ (où S est une matrice telle que $S\,S^T = \psi$), l'échantillon G de variables g_1, g_2, g_3, ..., g_N est un ensemble de N v.a normales ayant $F_1(g)$ pour loi de répartition et les ψ_k pour coefficients de corrélation [34].

Remarquons que, la matrice ψ étant doublement symétrique, la matrice S se présente sous la forme suivante :

$$S = \begin{Vmatrix} s_{11} & & & & & & \\ s_{21} & s_{22} & & & & & \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ s_{\ell 1} & s_{\ell 2} & s_{\ell 3} & \cdot & s_{\ell\ell} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ s_{N1} & s_{N2} & s_{N3} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{NN} \end{Vmatrix}$$

Par conséquent $s_{ij} = 0$ si $j > i$ et par suite :

$$g_\ell = \sum_{i=1}^{i=\ell} s_i \, g'_i \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant \ell \leqslant N \tag{36}$$

Les v.a g_ℓ ainsi obtenues peuvent en théorie avoir des valeurs infinies, alors que la loi réelle est tronquée (avec $T_g = \frac{g_{max}}{\sigma_g}$ et $T'_g = \frac{-g_{min}}{\sigma_g}$ puisque $m_g \simeq 0$). Donc il faut "raboter" toutes les altitudes g_ℓ qui ne sont pas comprises entre g_{min} et g_{max}. Or, ce faisant, on change les paramètres de la loi (voir chapitre I, paragraphe 2-1-), c'est-à-dire que, sur les altitudes résultantes :

$$\left| \begin{array}{ll} E(g_\ell) \neq m_g & (\text{avec } m_g = 0) \\ E(g_\ell^2) \neq \sigma_g & \\ \dfrac{g_{max}}{E(g_\ell^2)} \neq T_g & \\ \dfrac{-g_{min}}{E(g_\ell^2)} \neq T'_g & \end{array} \right.$$

Il est donc nécessaire de modifier, au départ, les paramètres "moyenne" et "variance" de la loi $F_1(g)$ pour être certain que les inégalités (37) deviennent des égalités. Pour celà il suffit de prendre pour écart-type $\sigma'_g = \lambda \sigma_g$ et pour moyenne $m'_g = \varepsilon \mu \sigma'_g$ (puisque $m_g = o$), λ et μ étant obtenus à l'aide des figures 8 et 9 ; celles-ci donnent respectivement λ en fonction de $\sqrt{T_g \, T'_g}$ et μ en fonction de $\frac{\sqrt{T_g \, T'_g}}{\lambda}$, avec comme paramètre $K = \left(\frac{T'_g}{T_g}\right)^\varepsilon$ ($\varepsilon = 1$ si $\frac{T'_g}{T_g} \geqslant 1$ et $\varepsilon = -1$ si $\frac{T'_g}{T_g} < 1$) .

3 - GENERATION DU MOUVEMENT RESIDUEL D'UNE COUPE DE TERRAIN DONT LES EXTREMITES SONT DES SOMMETS RELATIFS.

La méthode décrite au paragraphe précédent permet de créer une suite d'altitudes, la première et la dernière étant traitées de la même manière que les altitudes intermédiaires.

Il peut être intéressant dans de nombreux cas de créer des coupes de terrain pour lesquelles les extrêmités sont des sommets relatifs c'est-à-dire, plus précisément, des points hauts choisis au mieux dans des cercles de rayons donnés. En effet, le plus souvent, l'observateur peut choisir sur le terrain le point haut le plus favorable à condition que sa distance par rapport à un point de référence reste inférieure à une certaine valeur. La méthode qui suit permet d'engendrer une coupe de terrain synthétique satisfaisant à ces conditions.

Soient Γ_1 , Γ_2 les cercles de "choix". Les points a et b les plus hauts des deux cercles Γ_1 et Γ_2 sont répartis uniformément dans ces cercles ; le support de visée (Δ) qui les joint est donc une droite dont la loi de probabilité est connue et facile à simuler. Cette remarque est à la base de la méthode suivante.

Les points les plus hauts étant a priori répartis uniformément dans les cercles de choix Γ_1 et Γ_2 , de rayon R_1 et R_2, et centrés sur O_1 et O_2, le support de visée (Δ) sera obtenu en joignant deux points M_1 et M_2 tirés aléatoirement dans chacun des cercles suivant une loi uniforme. Si l'on pose $O_1\ O_2 = D'$, on aura :

$$(38)\quad M_1 \begin{vmatrix} X_1 = -\frac{D'}{2} + R_1\sqrt{u_1}\ \cos 2\pi v_1 \\ Y_1 = R_1\sqrt{u_1}\ \sin 2\pi v_1 \end{vmatrix} \quad , \quad M_2 \begin{vmatrix} X_2 = \frac{D'}{2} + R_2\sqrt{u_2}\ \cos 2\pi v_2 \\ Y_2 = R_2\sqrt{u_2}\ \sin 2\pi v_2 \end{vmatrix}$$

les u_i et v_i étant tirés indépendamment selon un loi uniforme sur (0,1). On détermine ainsi trois segments : $\ell_1 = A_1\ B_1$, $\ell_2 = A_2\ B_2$, $\lambda_a = B_1\ A_2$ (figure 22).

Si H_1 et H_2 sont les projections de O_1 et O_2 sur (Δ) et si l'on pose $\ell = H_1\ H_2$, on obtient $\lambda_a = \ell + \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$, ℓ, ℓ_1 et ℓ_2 étant calculés à l'aide des formules suivantes :

$$
(39)\quad
\begin{cases}
tg\,\alpha = \dfrac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} \qquad \cos\alpha = \dfrac{1}{1 + tg^2\,\alpha} \\
O_1 H_1 = \left|\cos\alpha\left[(X_1 + \dfrac{D'}{2})tg\alpha - Y_1\right]\right|, \; O_2 H_2 = \left|\cos\alpha\left[(X_1 - \dfrac{D'}{2})tg\alpha - Y_1\right]\right| \\
\ell_1 = 2\sqrt{R_1^2 - O_1 H_1^{\,2}}\;, \quad \ell_2 = 2\sqrt{R_2^2 - O_2 H_2^{\,2}}\;, \quad \ell = D'\cos\alpha
\end{cases}
$$

Bien entendu, les différentes longueurs sont exprimées en nombre de pas τ ; plus précisément :

- le nombre d'intervalles entre A_1 et B_1 est $N'_1 = \dfrac{\ell_1}{\tau}$
- le nombre d'intervalles entre A_1 et A_2 est $N'_2 = \dfrac{2\ell + \ell_1 - \ell_2}{2\tau}$
- le nombre d'intervalles entre A_1 et B_2 est $N'_3 = \dfrac{\lambda_a}{\tau} = \dfrac{2\ell + \ell_1 + \ell_2}{\tau}$
- le nombre d'intervalles entre A_2 et B_2 est $N'_4 \simeq N'_3 - N'_2$

$\dfrac{\lambda_a}{\tau}$, $\dfrac{\ell_1}{\tau}$, $\dfrac{\ell_2}{\tau}$ étant arrondis à l'entier supérieur.

Ces paramètres étant déterminés on crée, selon la méthode décrite au paragraphe précédent, une suite d'altitudes sur la longueur $A_1\,B_2$ puis on recherche sur les segments $A_1\,B_1$ et $A_2\,B_2$ les altitudes les plus élevées, soit g_1 et g_n respectivement.

4 - CAS GENERAL

D'une manière générale, la méthode pour créer par simulation une coupe de terrain est alors la suivante :

a) on procède comme au paragraphe 3 (R_1 et R_2 pouvant éventuellement être nuls) pour générer la suite des altitudes du mouvement résiduel ;

b) on superpose ce mouvement résiduel au mouvement lent de la coupe, avec une phase aléatoire ou non (par "phase" il faut entendre un décalage entre l'origine de la coupe résiduelle et l'origine du mouvement lent) ;

c) on recherche enfin, comme au paragraphe 3, les points les plus hauts sur les segments $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$ en tenant compte, cette fois-ci, de l'ondulation lente, d'où :

$$z_\ell = f_\ell + g_\ell \qquad \text{pour } 1 \leqslant \ell \leqslant N$$

avec $$z_{min} \leqslant z_\ell \leqslant z_{max}$$

5 - REMARQUES

5-1-

Il est assez aisé de déterminer la tendance générale du terrain et par suite le mouvement lent d'une coupe quelconque. Il suffit pour celà de superposer au terrain un quadrillage lâche (le pas optimal est de l'ordre de un ou deux kilomètres) et, pour chaque coupe, d'effectuer un lissage. Quant aux caractéristiques du mouvement résiduel, elles se déterminent en effectuant une étude détaillée du relief sur des zones très limitées. Le travail expérimental peut donc être considérablement réduit par rapport à celui qui a été effectué sur les régions d'Orléans, Saulieu et Saint-Flour.

5-2-

La fonction ψ_θ tend vers zéro lorsque le retard augmente, si bien que les coefficients de corrélation ψ_k peuvent être considérés comme nuls dès que k dépasse une certaine valeur N ; cela signifie que les matrices ψ et S sont de rang (N+1).

Il n'est pas pour autant impossible de générer des coupes de terrain de longueur supérieure à N. En effet le $(N+q+1)^{ième}$ point est indépendant des q premiers points(puisque ψ_{N+1}, ψ_{N+2}, ..., ψ_{N+q} sont nuls), mais il n'est pas indépendant des N points qui le précèdent puisque l'on peut écrire :

$$g_{N+q} = \sum_{i=1}^{i=N} s_{Ni}\, g'_{i+q}$$

Par conséquent, en choisissant q aussi grand que l'on veut, il est possible, en procédant de proche en proche, de créer une coupe de longueur quelconque (mais évidemment inférieure ou égale à la longueur du mouvement lent).

5-3-

La méthode décrite ci-dessus ne donne pas, telle quelle, des résultats bien satisfaisants. En effet elle ne permet pas de tenir compte de certaines des caractéristiques du terrain que l'on ne peut définir par des considérations statistiques. En particulier elle ne permet pas d'introduire les "plateaux".De plus si l'on détermine les coefficients de corrélation ψ_k des g_ℓ, on ne retrouve pas les valeurs ψ_k d'origine. Celà est dû à ce que les v.a g'_ℓ,obtenues à l'aide d'un programme de Nombres Aléatoires à Répartition Gaussienne (NAREG), ne sont pas totalement indépendantes comme elles le devraient(il n'y a malheureusement pas d'algorithme parfait en la matière).

Afin d'améliorer le modèle en le rendant plus réaliste, on a introduit un test sur les z_ℓ tel que si $|z_{\ell=k} - z_\ell| \leqslant \alpha$ pour $0 < k \leqslant k_o$ on remplace $z_{\ell+k}$ par z_ℓ. Si l'inégalité ci-dessus est encore réalisée pour $k > k_o$ on limite toutefois la longueur du plateau à k_o [1]. Notons que l'on suppose que z_ℓ ne fait pas partie du plateau précédent.

5-4-

Les difficultés citées ci-dessus montrent la nécessité de définir un critère de validité de la méthode tel que l'on puisse affirmer, avec une bonne probabilité de ne pas se tromper, que les coupes de terrain ainsi créées sont statistiquement identiques à des coupes de terrain réelles.

Un tel critère doit être choisi en fonction du genre de problèmes pour lesquels le modèle de génération de coupes doit être utilisé. Or l'application la plus courante de cette étude du relief est la visibilité entre deux points situés au sol ou au dessus du sol. La méthode pourra donc être considérée comme valable si la probabilité de visibilité déterminée sur un ensemble de coupes synthétiques est identique à la fréquence de visibilité expérimentale quelle que soit la position respective des deux points.

La partie suivante est consacrée à cette question de la visibilité.

3e PARTIE

ETUDE DE L'INTERVISIBILITE

I N T R O D U C T I O N

Un des problèmes les plus fréquemment rencontrés dans l'évaluation d'un système lié au sol est de savoir si deux points A et B situés au voisinage du sol sont ou non en visibilité directe (par exemple le radar de veille d'un système sol-air voit-il ou non tel ou tel avion). On peut aborder la question de plusieurs façons :

- soit en examinant "coup par coup" si les deux points sont en visibilité ou non ;
- soit en traitant le problème de l'intervisibilité de manière statistique, c'est-à-dire en déterminant des courbes expérimentales de fréquence de visibilité (sur terrain réel ou simulé) en fonction de certains paramètres tels que la distance séparant les deux points ou encore la hauteur de ces points au dessus du sol ;
- soit enfin en considérant l'aspect probabiliste de la visibilité, c'est-à-dire en cherchant une formulation mathématique de la probabilité d'intervisibilité des deux points A et B à partir de certaines données statistiques concernant la coupe de terrain située sous la droite AB.

Le premier point ne pose pas de problème particuliers ; bien que le calcul au "coup par coup" soit d'un emploi très fréquent dans nos simulations, on ne s'y attardera donc pas. Quant aux points suivants, ils sont développés dans les chapitres I, II et III ci-après. Le chapitre I est consacré à l'aspect purement expérimental de la fréquence de visibilité, c'est-à-dire en définitive de calcul de la probabilité que la fonction aléatoire "coupe de terrain" coupe un segment de droite dont les extrêmités sont situées à une hauteur positive ou nulle au dessus du sol. Quant au chapitre III, il traite d'un procédé statistique assez voisin de celui appliqué au chapitre I, mais adapté à des terrains simulés.

REMARQUE

Afin de simplifier l'écriture des expressions mathématiques, on supprimera dans tout ce qui suit l'indice c que l'on avait précédemment utilisé pour désigner les paramètres relatifs aux coupes de terrain.

CHAPITRE I

ETUDE EXPERIMENTALE

L'étude expérimentale des visibilités comprend deux parties principales :

a) pour un certain nombre de coupes, calcul des fréquences de visibilité entre deux points situés au sol ou au dessus du sol et détermination des pourcentages de parties vues par un observateur situé au sol ou au dessus du sol ;

b) détermination des fréquences de visibilité moyennes et des pourcentages moyens de parties vues correspondant à l'ensemble d'une région et à une direction donnée.

1 - PRINCIPE DE LA DETERMINATION EXPERIMENTALE DE L'INTERVISIBILITE

1-1- VISIBILITE A COURTE ET MOYENNE DISTANCE

Soit (figure 23) une coupe de terrain échantillonnée avec un pas τ de 125 m, A un point situé à une hauteur h_A au dessus d'un point a du sol et B un point situé à une hauteur h_B au dessus d'un point b du sol. Si la coupe ab est constituée par une suite de (n+1) altitudes, la distance ab est $D = n\tau$. Désignons en outre par z_j l'altitude d'un point intermédiaire M_j du sol et par $tg\ \alpha_j$ la pente de AM_j [1] ; le point M_j sera vu de A si $tg\ \alpha_j$ est supérieure à toutes les pentes $tg\alpha_k$ obtenues pour $k < j$ et il ne sera pas vu dans le cas contraire. Si la pente de AB est supérieure à la plus gande des pentes $tg\alpha_j$, A et B sont en visibilité. En déplaçant par pas de 125 m le couple de points AB le long de la coupe de terrain (figure 24) on obtient aisément la fréquence de visibilité correspondant à une distance D donnée ; c'est le rapport du nombre de cas où les points A et B sont en visibilité au nombre de cas total. Le résultat n'a bien entendu de valeur statistique que si le nombre de coupes AB est suffisant (environ une centaine) c'est-à-dire, pratiquement, si la distance D n'excède pas 10 ou 12 kilomètres (la longueur totale de la coupe étant d'environ 20 à 25 kilomètres).

---

(1) La pente étant négative quand M_j est en dessous de l'horizontale passant par A.

Par ailleurs, pour chaque couple AB, le pourcentage de parties vues le long de ab à partir du point A est égal à la proportion de points M_j vus de A. Le pourcentage moyen de parties vues correspondant à une distance D donnée s'obtient en moyennant les résultats relatifs à l'ensemble des couples de points AB.

En faisant varier D on peut ainsi tracer des courbes de fréquence de visibilité ou de pourcentage de parties vues pour diverses coupes et pour plusieurs valeurs des hauteurs h_A et h_B.

REMARQUES

a) Le pourcentage de parties vues se déduit de la fréquence de visibilité par une intégration. En effet si l'on désigne par $p_v(d)$ la probabilité de visibilité en fonction de la distance, le pourcentage de parties vues le long d'une coupe de longueur D s'obtient par la formule théorique :

$$P(D) = \frac{1}{D} \int_0^D p_v(d) \ \delta d \tag{40}$$

Sur le plan pratique on peut écrire, puisque les distances sont quantifiées avec un pas τ de 125 m :

$$P(D) = P_n \qquad \text{puisque } D = n\,\tau$$

$$p_v(d) = p_k \qquad \text{en posant } d = k\,\tau$$

Le pourcentage de parties vues est alors donné par la formule suivante :

$$P_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k$$

c'est-à-dire, puisque p_1 est obligatoirement égal à 1 :

$$\boxed{P_n = \frac{1}{n} \left[1 + \sum_{k=2}^{n} p_k \right]} \tag{41}$$

b) De la même manière, le pourcentage de parties vues dans un secteur s'obtient à partir de la fréquence de visibilité par la formule :

$$P'(D) = \frac{2}{D^2} \int_0^D d\ p_v(d) \ \delta d \tag{42}$$

soit, en appliquant la formule des trapèzes et en faisant $p_1 = 1$;

(43) $$\boxed{P'_n = \frac{2}{n^2}\left[1 + \sum_{k=2}^{n-1} k\, p_k + \frac{n\, p_n}{2}\right]}$$

c) A partir des résultats précédents on peut déduire le pourcentage de parties vues dans une bande de terrain centrée sur un point. En effet si D et D' sont les rayons minimal et maximal de la bande de terrain et $P'_{D\,D'}$ le pourcentage cherché, on a :

$$P'_{DD'} = \frac{2}{D'^2 - D^2} \int_D^{D'} d\, p_v(d)\, \delta d$$

d'où :

(44) $$P'_{DD'} = \frac{D'^2\, P'_{D'} - D^2\, P'_D}{D'^2 - D^2}$$

soit encore, en posant $D = n\tau$ et $D' = m\tau$:

(45) $$\boxed{P'_{n,m} = \frac{m^2\, p'_m - n^2\, p'_n}{m^2 - n^2}}$$

Bien entendu lorsque m=n, on trouve que $P'_{n,n} = p_n$, probabilité de visbilité à la distance $D = n\tau$.

d) Dès que la distance D atteint quelques kilomètres, il est nécessaire de tenir compte de la rotondité de la terre (figure 25). Pour celà il suffit de remplacer chaque altitude z_ℓ par :

(46) $$\boxed{z'_\ell = z_\ell - \frac{\ell^2\, \tau^2}{2\, R}}$$

où R est le rayon de la terre exprimé en mètres et corrigé d'un coefficient k égal à $\frac{4}{3}$ ou $\frac{5}{4}$ selon le cas pour tenir compte de la réfraction de l'atmosphère :

(47) $$\boxed{R = k \,.\, 6{,}4 \;\; 10^6 \text{ mètres}}$$

1-2- VISIBILITE A GRANDE DISTANCE

1-2-1-

Considérons deux points A et B très éloignés dont l'un (A) est au dessus du sol à une hauteur h_A suffisamment grande pour que A soit toujours plus haut que le point le plus élevé du terrain et l'autre (B) au sol, et soit A' un autre point situé sur la ligne de visée AB. Il est certain que la probabilité p_A pour que A voie B est identique à la probabilité p'_A pour que A' voie B dès que la hauteur h'_A de A' par rapport au terrain dépasse $(z_{max} - z_{min})$, c'est-à-dire $(T + T')\sigma$, ce qui se produit dès que la distance entre A' et B dépasse une valeur minimale D_o. Soit alors α l'angle de la ligne de visée AB avec le plan tangent à la terre en B ; pour un terrain donné, il existe une relation simple entre α et D_o. En effet, si l'on veut que p_A soit strictement identique à p'_A quelle que soit la position de B, il faut se placer dans le cas défavorable où l'altitude de B est minimale, c'est-à-dire égale à $m-T'\sigma$. Dans ces conditions (figure 26).

(48) $$\frac{tg\alpha}{\sigma} = \frac{T+T'}{D_o} - \frac{D_o}{2R\sigma}$$

Cette relation fournit donc une borne supéreure de D_o ; en pratique toutefois p_A reste très voisin de p'_A même si la distance A'B est inférieure à D_o, tout en restant supérieure à une valeur $(D_o)_{min}$ telle que :

(49) $$\boxed{\frac{tg\alpha}{\sigma} = \frac{K}{(D_o)_{min}} - \frac{(D_o)_{min}}{2R\sigma}} \qquad \text{avec } K < T+T'$$

Par ailleurs h_A, D et α sont reliés par une relation simple analogue à la précédente :

(50) $$\boxed{\frac{tg\alpha}{\sigma} = \frac{1}{D}\left(\frac{h_A}{\sigma} - \frac{D^2}{2R\sigma}\right)}$$

où $tg\alpha$ est une valeur moyenne obtenue en supposant que les points A et B sont situés à une altitude moyenne. Par conséquent si l'on détermine expérimentalement la probabilité pour qu'une droite Bu de pente $tg\alpha$ ne coupe pas le terrain, il est très aisé d'en déduire, à l'aide de la relation (50), un réseau de courbes donnant la fréquence d'intervisibilité de deux points

distants de D, dont l'un est au sol et l'autre situé à une hauteur h_A au dessus du sol, la distance AB pouvant être très nettement supérieure à la longueur des coupes dont on dispose.

1-2-2-

La probabilité p' pour qu'une droite Bu de pente tgα ne coupe pas le terrain s'obtient aisément comme sous produit du calcul décrit au paragraphe précédent, en permutant les points A_i et B_i. En effet soit (figure 27) $tg\alpha_i$ la plus grande des pentes $tg\alpha_{ji}$ ($tg\alpha_{ji}$ étant la pente de la droite B_iM_{ji}) qui correspond à un couple de points B_i et A_i situés au sol et distants d'au moins $(D_o)_{min}$; à partir de l'ensemble des valeurs de $tg\alpha_i$ obtenues en faisant varier i de 0 à q=N-n, il est aisé de déterminer la courbe des fréquences cumulées de la quantité $\frac{tg\alpha}{\sigma}$

$$F_2(\lambda) = Pr\left\{\frac{tg\alpha_i}{\sigma} \leqslant \lambda\right\} \tag{52}$$

Or, par ailleurs, p' est la probabilité pour que $\frac{tg\alpha}{\sigma}$ soit supérieure à $\frac{tg\alpha_i}{\sigma}$; donc :

$$p' = F_2\left(\frac{tg\alpha}{\sigma}\right) \tag{53}$$

soit encore

$$\boxed{p' = F_2\left(\frac{h_A}{D\sigma} - \frac{D}{2R\sigma}\right)} \tag{54}$$

La formule (54) permet, connaissant F_2, de déterminer la probabilité d'intervisibilité de deux points A et B très éloignés en fonction du rapport $\frac{h_A}{\sigma}$ et de la distance D ; les seules conditions à respecter sont :

a) que la longueur des coupes dont on dispose soit suffisante pour que la relation (50) soit vérifiée,

b) que le nombre (q+1) de couples A_iB_i soit assez grand pour que la fonction de répartition F_2 ait une signification du point de vue statistique.

REMARQUES

a) Pour les commodités de l'exposé la terre a été supposée plate ; bien entendu, comme au paragraphe précédent, il faut tenir compte de l'effet de rotondité (voir formule 46).

b) Considérons les deux distances D et D' ; si h'_A est supérieur à T, la relation (54) montre que, à probabilité de visibilité constante, on a :

$$\frac{h_A}{D} - \frac{D}{2R} = \frac{h'_A}{D'} - \frac{D'}{2R} \qquad (55)$$

d'où, pour les distances faibles ($\frac{D^2}{2R} \ll h_A$) ,

$$\boxed{\frac{h_A}{h'_A} \simeq \frac{D}{D'}} \qquad (56)$$

La distance de visibilité est sensiblement proportionnelle à la hauteur.

2 - RESULTATS

2-1- GENERALITES

Dans chaque région on a choisi 8 directions ($\theta = k\frac{\pi}{4}$, avec $0 \leqslant k \leqslant 7$) et pour chaque direction on a sélectionné une vingtaine de coupes équidistantes. En moyennant les résultats obtenus sur chaque ensemble de 20 coupes on a déterminé :

a) la fréquence de visibilité entre un observateur situé au sol ou au dessus du sol, en un point quelconque, et un observé situé au sol en un point quelconque ; la hauteur de l'observateur au dessus du sol est normée par rapport à l'écart-type moyen σ des 20 coupes : les valeurs de $\frac{h_A}{\sigma}$ ont été choisies entre 0 et 30 ;

b) le pourcentage de parties vues le long d'un axe et dans un secteur.

2-2- FREQUENCES DE VISIBILITE

Pour les courtes distances (inférieure à 10 km), la fréquence de visibilité a été déterminée directement (voir paragraphe 1-1 ci-dessus). Les figures 28 à 33 traduisent les résultats obtenus pour les directions 0° (Ouest-Est) et 90° (Sud-Nord).

Pour les distances supérieures à 10 km il a fallu passer par l'intermédiaire de la fonction $F_2(\frac{tg\alpha}{\sigma})$. Dès que la longueur de la coupe excède 10 ou 11 km, $F_2(\frac{tg\alpha}{\sigma})$ ne dépend plus de cette longueur. Les figures 34 à 36 montrent l'allure des courbes pour chacune des trois régions.

De cette fonction on tire la fréquence de visibilité à grande distance à l'aide de la formule (54) di-cessus. Il est intéressant de noter qu'autour de la distance D=10 km, les valeurs obtenues par les deux méthodes se recoupent parfaitement. Les courbes 37 à 42 donnent, dans les mêmes conditions que précédemment, les résultats obtenus en définitive pour l'échelle de distance 0-60 km.

2-3- POURCENTAGE DE PARTIES VUES

Le pourcentage de parties vues le long d'un axe a été déterminé d'une part directement (du moins sur des coupes courtes), d'autre part à l'aide de la formule (41). Les résultats coïncident et il est par conséquent très légitime d'utiliser systématiquement les formules (41), (43) et (45) pour la détermination du pourcentage de parties vues. Les courbes 43 à 54 traduisent les résultats obtenus sur les trois régions.

CHAPITRE II

ETUDE THEORIQUE DE L'INTERVISIBILITE

1 - INTRODUCTION

Considérons une coupe de terrain quelconque (figure 55) et deux points A et B situés à des hauteurs h_A et h_B au dessus du sol.

La probabilité d'intervisibilité entre A et B, notée Pr { A voit B }, est évidemment égale à la probabilité pour qu'aucun point du terrain ne coupe AB. Ce problème très général n'a pas encore reçu de solution rigoureuse même dans le cas où la droite AB est horizontale [35]. Toutefois on a pu mettre au point, dans le cadre de la présente étude, une méthode approchée en observant que le mouvement résiduel a une fonction d'autocorrélation ψ_θ rapidement décroissante ; des points relativement peu éloignés ont donc des altitudes décorrélées, que l'on admettra indépendantes puisque la loi de distribution de ces altitudes est sensiblement gaussienne.

La solution approchée adoptée ici consiste à substituer à la fonction z(t) une suite discrètère de variables aléatoires $z_i=z(t_i)$ indépendantes, de fonction de répartition commune $F_o(Z)$. Géométriquement, la ligne continue représentative de la fonction z(t) dans le plan (t,z) se trouve remplacée par une ligne brisée en marches d'escalier de longueur ρ_a. On désignera cette valeur sous le nom de rayon de corrélation apparent ; ρ_a correspond à un retard tel que la fonction de corrélation C_θ ait une valeur donnée $(C_\theta)_o$ (figure 56).

Comme on l'a vu précédemment une coupe de terrain est la superposition d'un mouvement lent et d'un mouvement résiduel gaussien tronqué. Dans le cas présent il paraît légitime de représenter le mouvement lent par une succession de segments de droites de longueur variable (l'examen des tendances des diverses coupes montre que la longueur minimale envisageable est de l'ordre du kilomètre). La figure 57 montre un exemple de coupe de terrain ainsi définie (on désigne par f l'altitude du point courant du mouvement lent et par g celle du point courant du mouvement résiduel, avec E(g)=0, et on pose z = f+g) .

La probabilité d'intervisibilité entre A_o et A_n est égale à la probabilité pour qu'aucune des portions de terrain entre a_ℓ et $a_{\ell+1}$ ne coupe le segment $A_\ell\ A_{\ell+1}$. Avant d'étudier le cas général on va examiner le cas particulier très important où n=1, c'est-à-dire celui où le mouvement lent est représenté par un seul segment (ce qui en pratique correspond à des distances de un ou deux kilomètres au maximum).

2 - ETUDE DU CAS PARTICULIER n = 1

2-1- FORMULATION

Dans le cas où n=1, une coupe de terrain quelconque a la forme représentée sur la figure 58. Le mouvement résiduel sera assimilé à une suite de paliers de longueur ρ_g (figure 59), le rayon de corrélation ρ_g étant tel que $\psi_{\theta=\rho_g} = (\psi_\theta)_o$. Il y a lieu bien sûr de distinguer deux représentations selon que les paliers sont déterminés en allant de a_o vers a_1 ou de a_1 vers a_o, c'est-à-dire en pratique selon que l'on calcule $\Pr A_o\{\text{voit } A_1\}$ ou $\Pr\{A_1 \text{ voit } A_o\}$.

Soit alors q_o le nombre de paliers correspondant à la coupe $a_o\ a_1$ (en supposant que la longueur $b_o\ b_1$ soit égale à un nombre entier de paliers) et soit k l'abscisse courante (comprise entre 0 et q_o) d'un point de la coupe résiduelle. L'altitude du point courant de la coupe est $z_{o,k}=f_{o,k}+g_{o,k}$, avec $f_{o,o}=f_o$, $g_{o,o}=g_o$, $z_{o,o}=z_o$ et $f_{o,q_o}=f_1$, $g_{o,q_o}=g_1$, $z_{o,q_o}=z_1$; par définition du rayon de corrélation ρ_g, on supposera que les $g_{o,k}$ sont des v.a indépendantes.

La probabilité d'intervisibilité entre A_o et A_1, notée $p_v(q_o,h_o,h_1)$, doit être normalement la même, que A_o regarde A_1 ou que A_1 regarde A_o. Toutefois les calculs de $\Pr\{A_o \text{ voit } A_1\}$ et $\Pr\{A_1 \text{ voit } A_o\}$ doivent aboutir à des résultats différents puisque la représentation de la coupe de terrain $a_o\ a_1$ n'est pas la même dans les deux cas. Par suite on pourra prendre, par souci de symétrie :

$$p_v(q_o,h_o,h_1) = \frac{\Pr A_o\{\text{voit } A_1\} + \Pr\{A_1 \text{ voit } A_o\}}{2} \qquad (57)$$

Posons successivement :

$$t_{k,q_o} = \frac{h_o + \frac{k}{q_o}(h_1 - h_o)}{\sqrt{2}\ \sigma_g}$$

$$t_{q_o} = t_{o,q_o} - t_{q_o,q_o} = \frac{h_o - h_1}{\sqrt{2}\ \sigma_g}$$

$tg\alpha_{max}$ = pente maximale du terrain

$$u = \frac{\rho_g\ tg\alpha_{max}}{\sqrt{2}\ \sigma_g} \simeq 2 \quad \text{(voir annexe I)}$$

$$u_o = u\left(1 - \frac{\sqrt{2}\ t_{q_o,q_o}}{T_g + T'_g}\right) = u\left[1 - \frac{h_1}{(T_g + T'_g)\ \sigma_g}\right]$$

$$u'_o = u\left(1 - \frac{\sqrt{2}\ t_{o,q_o}}{T_g + T'_g}\right) = u\left[1 - \frac{h_o}{(T_g + T'_g)\ \sigma_g}\right]$$

$$v_o = \inf\ (u_o,\ t_{o,q_o})$$

(58)

$$v'_o = \inf\ (u'_o,\ t_{q_o,q_o})$$

$$\theta = \frac{(g_1 + h_1) - (g_o + h_o)}{\sqrt{2}\ \sigma_g}$$

$$K_{q_o}(t_{q_o,q_o}, \theta) = K_{q_o}\left(\frac{h_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}, \theta\right) = \prod_{k=1}^{q_o - 1} F\left(t_{o,q_o} + \frac{k}{q_o}\theta\right)$$

$$K'_{q_o}(t_{q_o,q_o}, -\theta) = K'_{q_o}\left(\frac{h_1}{\sqrt{2}\ \sigma_g}, -\theta\right) = \prod_{k=1}^{q_o - 1} F\left(t_{q_o,q_o} - \frac{k}{q_o}\theta\right)$$

$$\lambda_{q_o}(t_{o,q_o}, \theta) = \lambda_{q_o}\left(\frac{h_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}, \theta\right) = \frac{F(t_{o,q_o} + \theta)}{F\left(t_{o,q_o} + \frac{\theta}{q_o}\right)}$$

$$\lambda'_{q_o}(t_{q_o,q_o}, -\theta) = \lambda'_{q_o}\left(\frac{h_1}{\sqrt{2}\ \sigma_g}, -\theta\right) = \frac{F(t_{q_o,q_o} - \theta)}{F\left(t_{q_o,q_o} - \frac{\theta}{q_o}\right)}$$

F étant la fonction de répartition correspondant à la loi normale réduite.

On montre alors (voir annexe I) que l'espérance mathématique de la probabilité de visibilité est donnée par :

$$E\left[p_v(q_o,h_o,h_1)\right] \simeq 1 - \int_{-q_o u_o}^{0} \left[1 - \frac{1}{2} K'_{q_o}(\dagger_{q_o},q_o,-\theta)\right] p(\theta+\dagger_{q_o})d\theta$$

$$- \int_{0}^{q_o u'_o} \left[1 - \frac{1}{2} K_{q_o}(\dagger_o,q_o,\theta)\right] p(\theta+\dagger_{q_o})d\theta + \int_{-q_o v_o}^{0} \frac{1}{2} K_{q_o}(\dagger_c,q_o,\theta)\lambda_{q_o}(\dagger_o,q_o,\theta)p(\theta+\dagger_{q_o})d\theta \qquad (59)$$

$$+ \int_{0}^{q_o v'_o} \frac{1}{2} K'_{q_o}(\dagger_{q_o},q_o,-\theta)\ \lambda'_{q_o}(\dagger_{q_o},q_o,-\theta)\ p(\theta+\dagger_{q_o})\ d\theta$$

La densité de probabilité $p(t)$ est donnée par la formule (29), avec $T_x = T'_x = \frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}$; on a donc, en désignant par $\Lambda(T,t)$ la fonction échelon dans l'intervalle $(-T,T)$:

$$p(t) = \frac{1/\sqrt{2\pi}}{2G\left(\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}\right)} e^{-\frac{t^2}{2}} \Lambda\left(\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}, t\right) \qquad (60)$$

avec $2G\left(\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}\right) \simeq 1$ puisque l'on a vu qu'en pratique $\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}} \simeq 3,5$.

En introduisant explicitement la distance et les hauteurs h_o et h_1, on peut écrire de la même manière :

$$E\left[p_v(D,h_o,h_1)\right] \simeq 1 - \int_{-q_o u_o}^{0} \left[1 - \frac{1}{2} K'_{q_o}\left(\frac{h_1}{\sqrt{2}\,\sigma_g},-\theta\right)\right] p\left(\theta+\frac{h_o - h_1}{\sqrt{2}\,\sigma_g}\right) d\theta$$

$$- \int_{0}^{q_o u'_o} \left[1 - \frac{1}{2} K_{q_o}\left(\frac{h_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g},\theta\right)\right] p\left(\theta+\frac{h_o-h_1}{\sqrt{2}\,\sigma_g}\right) d\theta$$

$$+ \int_{-q_o v_o}^{0} \frac{1}{2} K_{q_o}\left(\frac{h_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g},\theta\right)\lambda_{q_o}\left(\frac{h_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g},\theta\right) p\left(\theta+\frac{h_o-h_1}{\sqrt{2}\,\sigma_g}\right) d\theta \qquad (61)$$

$$+ \int_{0}^{q_o v'_o} \frac{1}{2} K'_{q_o}\left(\frac{h_1}{\sqrt{2}\,\sigma_g},-\theta\right)\ \lambda'_{q_o}\left(\frac{h_1}{\sqrt{2}\,\sigma_g},-\theta\right)\ p\left(\theta+\frac{h_o-h_1}{\sqrt{2}\,\sigma_g}\right) d\theta$$

Ces deux formules, assez complexes, montrent que la probabilité de visibilité ne dépend que des paramètres du mouvement résiduel, de la distance et de la hauteur des deux points A_o et A_1 normée par rapport à l'écart-type σ_g. Elles se simplifient dans deux cas particuliers très importants : celui où $h_o = h_1 = 0$ (les deux points A_o et A_1 sont au sol) et celui où $q_o = 1$ (les deux points sont distants de ρ_g).

2-2- CAS PARTICULIER $h_o = h_1 = 0$

Si $h_o = h_1 = 0$, $t_{k,q_o} = 0$ quelque soit k. Donc :

$$K_{q_o}(t_{o,q_o},\theta) = \prod_{k=1}^{q_o-1} F(\frac{k}{q_o}\theta) \quad , \quad K'_{q_o}(t_{q_o,q_o},-\theta) = \prod_{k=1}^{q_o-1} F(-\frac{k}{q_o}\theta)$$

$$v_o = v'_o = 0 \quad , \quad u_o = u'_o = u$$

Par suite on obtient, en tenant compte de la symétrie en θ :

$$(62) \qquad \boxed{E\left[p_v(q_o,0,0)\right] = 1 - 2\int_0^{q_o u}\left[1 - \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{q_o-1} F(\frac{k}{q_o}\theta)\right] p(\theta)\, d\theta}$$

a) Si $q_o = 0$, $E\left[p_v(0,0,0)\right] = 1$

b) Si $q_o = 1$, $q_o u (\simeq 2)$ est inférieur à $\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}$ $(\simeq 3{,}5)$ et par ailleurs $\prod_{k=1}^{0} F(k\theta) = 1$

Donc :

$$E\left[p_v(1,0,0)\right] \simeq 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-\frac{\theta^2}{2}}\, d\theta, \text{ en assimilant } 2G(\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}) \text{ à } 1,$$

d'où :

$$(63) \qquad \boxed{E\left[p_v(1,0,0)\right] = 1 - G(u)}$$

où G est la fonction de Galton.

c) Si $q_o \geqslant 2$, $q_o u$ est supérieur à 4, donc à $\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}$, et on obtient :

$$E\left[p_v(q_o,0,0)\right] \simeq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}\pi C\left(\frac{T_g+T'_g}{2}\right)} \int_0^{\frac{T_g+T'_g}{2}} \left[1 - \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{q_o-1} F\left(\frac{k}{q_o}\theta\right)\right] e^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta$$

soit encore :

(64)
$$\boxed{E\left[p_v(q_o,0,0)\right] \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{T_g+T'_g}{\sqrt{2}}} \prod_{k=1}^{q_o-1} F\left(\frac{k}{q_o}\theta\right) e^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta}$$

Les valeurs correspondantes de $E\left[p_v(q_o,0,0)\right]$ ne sont pas aisées à calculer sans le secours d'un ordinateur. Les calculs effectués sur machine donnent :

q_o	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E\left[p_v(q_o,0,0)\right]$	1	0,52	0,32	0,21	0,14	0,095	0,065	0,045	0,032	0,023	0,017

TABLEAU 9

La figure 60a traduit ces résultats, la courbe lissante passant par les différents points calculés permet de déterminer la probabilité de visibilité correspond à des distances quelconques, comprises entre $q_o\rho_g$ et $(q_o+1)\rho_g$.

2-3- CAS PARTICULIER $q_o = 1$

Dans ce cas on a les relations suivantes :

$$K'_{q_o}(t_{o,q_o},-\theta) = K_{q_o}(t_{q_o,q_o},\theta) = \lambda'_{q_o}(t_{o,q_o},-\theta) = \lambda_{q_o}(t_{q_o,q_o},\theta) = 1$$

$$t_{q_o} = t_1 = \frac{h_o - h_1}{\sqrt{2}\,\sigma_g}$$

Donc :

$$E\left[p_v(1,h_o,h_1)\right] \simeq 1 - \frac{1}{2}\int_{-u_o}^{u'_o} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta+t_1)^2}{2}} d\theta + \frac{1}{2}\int_{-v_o}^{v'_o} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta+t_1)^2}{2}} d\theta$$

$$\simeq 1 - \frac{1}{2}\int_{t_1-u_o}^{t_1+u'_o} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta + \frac{1}{2}\int_{t_1-v_o}^{t_1+v'_o} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta$$

soit encore :

$$(65) \qquad \boxed{E\left[p_v(1,h_o,h_1)\right] \simeq 1 - \frac{G(t_1+u'_o) - G(t_1-u_o) + G(t_1-v_o) - G(t_1+v'_o)}{2}}$$

Bien entendu si $h_o=h_1 = 0$ on retrouve $E\left[p_v(1,0,0)\right] \simeq 1 - G(u)$ puisque $t_1 = 0$, $u_o=u'_o=u$, $v_o=v'_o=0$.

a) Si $h_o=h_1=h$, on a $u_o=u'_o=u\left[1 - \frac{h}{(T_g+T'_g)\,\sigma_g}\right]$

$$v_o=v'_o=\inf\left\{u\left[1 - \frac{h}{(T_g+T'_g)\,\sigma_g}\right], \frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma}\right\}$$

si $\frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g} \geqslant u\left[1 - \frac{h}{(T_g+T'_g)\,\sigma_g}\right]$ ou $\frac{h}{(T_g+T'_g)\,\sigma_g} \geqslant 1$, $E\left[p_v(1,h,h)\right] = 1$

La première de ces deux conditions, qui correspond à $v_o=u_o$ et $v'_o=u'_o$, conduit à :

$$\frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g} \geqslant \frac{u}{1 + \frac{u\sqrt{2}}{T_g+T'_g}} \simeq 1{,}27 \quad , \text{ puisque } u\simeq 2 \text{ et } \frac{T_g+T'_g}{\sqrt{2}} \simeq 3{,}5.$$

Elle est donc réalisée plus vite (quand h croît) que la seconde. Par suite, dans le domaine de variation utile de h, on a :

$$v_o=v'_o=\inf\left\{u\left[1 - \frac{h}{(T_g+T'_g)\,\sigma_g}\right], \frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g}\right\} = \frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g}$$

c'est-à-dire que $E\left[p_v(1,h,h)\right] < 1$. Donc il vient :

(66) $$E\left[p_v(1,h,h)\right] \simeq 1 - G\left\{u\left[1 - \frac{h}{(T_g+T'_g)\,\sigma_g}\right]\right\} + G\left(\frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g}\right)$$

Le tableau 10 résume les valeurs numériques correspondantes.

$\frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g}$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	1	≥1,27
$E\left[p_v(1,h,h)\right]$	0,52	0,56	0,655	0,735	0,81	0,92	1

TABLEAU 10

b) Si $h_o = 0$ et $h_1 = h \neq 0$, on a $u_o = u\left[1 - \frac{h}{(T_g+T'_g)\,\sigma_g}\right]$

$$u'_o = u$$

$$v'_o = 0$$

$$t_1 = -\frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g}$$

Deux cas sont alors à considérer :

- ou bien $v'_o = u'_o$, c'est-à-dire $\frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g} \geq \frac{u}{1+\frac{u\sqrt{2}}{T_g+T'_g}} \simeq 1,27$ et alors

(67) $$E\left[p_v(1,h,h)\right] \simeq 0,75 + \frac{G\left(\frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g}\right)}{2}$$

puisqu'alors le terme $\left[\frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g}\left(1 + \frac{u\sqrt{2}}{T_g+T'_g}\right) + u\right]$ est supérieur à 2u, c'est-à-dire en pratique à 4 .

- ou bien $v'_o < u'_o$, c'est-à-dire $\frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g} < \frac{u}{1 + \frac{u\sqrt{2}}{T_g + T'_g}}$ et dans ce cas :

$$E\left[p_v(1,h,h)\right] \simeq 1 - \frac{G(-\frac{h}{\sqrt{2}\sigma_g}+u) + G\left[\frac{h}{\sqrt{2}\sigma_g}\,(1+\frac{u\sqrt{2}}{T_g+T'_g}) + u\right] - G(\frac{h}{\sqrt{2}\sigma_g})}{2}$$

Or $1 + \frac{u\sqrt{2}}{T_g + T'_g} \simeq 1{,}57$. Par suite :

(68)
$$E\left[p_v(1,h,h)\right] \simeq 1 - \frac{G(-\frac{h}{\sqrt{2}\sigma_g} + u) + G(1{,}57\,\frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g} + u) - G(\frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g})}{2}$$

le terme $G(1{,}57\,\frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g} + u)$ pouvant être pris égal à 0,5 dès que $\frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g}$ est supérieur à 0,3.

Les valeurs numériques relatives aux formules (67) et (68) sont consignées dans le tableau 11

$\frac{h}{\sqrt{2}\,\sigma_g}$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	1	1,27	2
$E\left[p_v(1,h,h)\right]$	0,52	0,54	0,58	0,63	0,68	0,75	0,815	0,99

TABLEAU 11

Les courbes correspondant aux deux tableaux ci-dessus sont représentés sur la figure 61.

2-4- REMARQUE IMPORTANTE

La formule (59) a été établie en supposant que les points a_o et a_1 étaient quelconques au sol. Pour certaines applications toutefois, notamment liaisons hertziennes, l'observateur et l'observé sont placés au voisinage de points hauts du terrain, en entendant par points hauts des points dont l'altitude par rapport au terrain moyen est supérieure ou égale à T_s fois l'écart-type.

Désignons alors par $p_o(t,T_s)$ et $p_1(t,T_s)$ respectivement les fonctions de distribution des v.a $\frac{g_{o,k}-g_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g}$ et $\frac{g_1-g_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g}$

avec $T_s\ \sigma_g \leqslant g_o \leqslant T_g\ \sigma_g$ (la détermination des expressions de $p_o(t,T_s)$ et $p_1(t,T_s)$ fait l'objet de l'annexe II) et par $\mu_o(T_s)$ et $\nu_o(T_s)$ la moyenne et l'écart-type de la v.a $\frac{g_{o,k}-g_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g}$ (voir annexe II, formules 176 et 177).

Il apparaît que chaque terme de la forme ;

$$P_r\left\{\frac{g_{o,k}-g_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g} \leqslant \frac{k}{q_o}\,t + t_{k,q_o}\right\}$$

peut être remplacé par :

$$(69)\qquad P_r\left\{\left[\frac{g_{o,k}-g_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g} - \mu_o(T_s)\right]\frac{1}{\nu_o(T_s)} \leqslant \left[\frac{k}{q_o}\,t + t_{k,q_o} - \mu_o(T_s)\right]\frac{1}{\nu(T_s)}\right\}$$

la v.a t ayant $p_1(t,T_s)$ comme loi de distribution. Par conséquent, dans le cas particulier où les points A_o et A_1 sont au sol (c'est-à-dire $h_o = h_1 = o$, donc $t_{k,q_o} = o$), la probabilité de visibilité, que l'on notera $E\left[p_v(q_o,o,o,T_s)\right]$, s'obtient par la relation :

$$(70)\qquad E\left[p_v(q_o,o,o,T_s)\right] \simeq M\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{q_o-1} F\left\{\left[\frac{k\theta}{q_o} - \mu_o(T_s)\right]\frac{1}{\nu_o(T_s)}\right\}\,p_1(t,T_s)\,dt$$

soit encore :

$$E\left[p_v(q_o,o,o,T_s)\right] \simeq \frac{M}{\left[G(T_g) - G(T_s)\right]^2} \int_o^{\frac{T_g - T_s}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{k=1}^{q_o - 1} F\left\{\left[\frac{k\theta}{q_o} - \mu_o(T_s)\right] \frac{1}{\nu_o(T_s)}\right\} \cdot \left[G(T_g\sqrt{2} - \theta) - G(T_s\sqrt{2} + \theta)\right] e^{-\frac{\theta^2}{2}} \, d\theta$$

Dans cette relation, M est un coefficient multiplicatif dont la signification est la suivante :

a) dans le cas où A_o et A_1 sont choisis au voisinage de points hauts mais sans tenir compte de la pente du terrain à proximité immédiate, M est évidemment égal à 1 ;

b) si par contre on impose, pour le choix de l'emplacement des 2 points, une condition supplémentaire sur le signe de la pente du terrain en A_o et A_1, de telle sorte que la vue soit dégagée dans la direction convenable, il est évident que M est égal à 4,du moins pour des distances suffisamment grandes (puisque la droite A_o A_1 est presque horizontale). Bien entendu si cette condition n'est réalisée qu'à une seule des deux extrémités, M = 2 à grande distance.

Dans le cas des très courtes distances, M reste égal à 1 quel que soit le dégagement aux extrêmités puisque,à la limite, quand D tend vers zéro, $E\left[p\ (D,o,o,T_s)\right]$ tend vers 1 dans tous les cas. Par suite, pour des distances intermédiaires M est,selon le mode de choix A_o et A_1, soit constamment égal à 1, soit compris entre 1 et 2, soit encore compris entre 1 et 4.

La formule (71), comparable à la relation (64), est très importante. En particulier elle permet, en prenant M = 4, de déterminer la probabilité d'intervisibilité de deux émetteurs-récepteurs puisque ceux-ci sont généralement à grande distance l'un de l'autre et choisis au voisinage de points hauts de manière à ce que les 2 extrêmités soient dégagées.

Les courbes de la figure 60 donnent l'allure de $E\left[p_v(q_o,o,o,T_s)\right]$ pour différentes valeurs de T_s et différentes hypothèses de dégagement des extrêmités (M = 1 et M = 4).

3 - ETUDE DU CAS GENERAL n > 1

3-1- PRELIMINAIRE

En se reportant à la figure 57 on voit que, pour une coupe donnée :

$$(72)\qquad \left|\begin{array}{l} P_r\{A_o \text{ voit } A_n\} = \prod_{\ell=0}^{n-1} Pr\{A_\ell \text{ voit } A_{\ell+1}\} \\ \\ P_r\{A_n \text{ voit } A_o\} = \prod_{\ell=n}^{1} Pr\{A_\ell \text{ voit } A_{\ell-1}\} \end{array}\right.$$

en faisant l'hypothèse que les altitudes f_ℓ des points b_ℓ sont indépendantes et en remarquant que les points A_ℓ sont alignés. Donc :

$$(73)\qquad p_v(N,h_o,h_n) = \frac{\prod_{\ell=0}^{n-1} P_r\{A_\ell \text{ voit } A_{\ell+1}\} + \prod_{\ell=0}^{n-1} \{Pr\ A_{\ell+1} \text{ voit } A_\ell\}}{2}$$

(N+1) étant le nombre total de points de la coupe ($D = N\,\rho_g$).

Or on peut admettre que, sauf cas particuliers,

$$Pr\{A_\ell \text{ voit } A_{\ell+1}\} \approx Pr\{A_{\ell+1} \text{ voit } A_\ell\}$$

Dans cette hypothèse, si l'on pose :

$$(74)\qquad p_v(q_\ell) = \frac{Pr\{A_\ell \text{ voit } A_{\ell+1}\} + Pr\{A_{\ell+1} \text{ voit } A_\ell\}}{2}$$

on peut écrire :

$$P_r\{A_\ell \text{ voit } A_{\ell+1}\} = p_v(q_\ell)\ (1+\varepsilon_\ell)$$

$$P_r\{A_{\ell+1} \text{ voit } A_\ell\} = p_v(q_\ell)\ (1-\varepsilon_\ell)$$

d'où :

$$(75)\qquad p_v(N,h_o,h_n) = \prod_{\ell=0}^{n-1} p_v(q_\ell)\ \frac{\prod_{\ell=0}^{n-1} (1+\varepsilon_\ell) + \prod_{\ell=0}^{n-1} (1-\varepsilon_\ell)}{2}$$

Les ε_ℓ étant petits et de signe quelconque on peut écrire en outre :

$$\frac{\prod_{\ell=0}^{n-1}(1+\varepsilon_\ell) + \prod_{\ell=0}^{n-1}(1-\varepsilon_\ell)}{2} \simeq 1$$

e qui conduit à :

76) $$p_v(N,h_o,h_n) \simeq \prod_{\ell=0}^{n-1} p_v(q_\ell)$$

e plus, pour les mêmes raisons que ci-dessus (les f_ℓ sont assimilés à es v.a indépendantes), les $p_v(q_\ell)$ sont des fonctions de v.a indépendantes. onc :

77) $$\boxed{E\left[p_v(N,h_o,h_n)\right] \simeq \prod_{\ell=0}^{n-1} E\left[p_v(q_\ell)\right]}$$

Chaque terme $E\left[p_v(q_\ell)\right]$ a une forme analogue à celle de la formule (59), ainsi qu'on le montre en annexe III ; l'expression de $E\left[p_v(N,h_o,h_n)\right]$ est donc fort complexe. Son intérêt est d'ailleurs limité, car elle suppose la connaissance des altitudes f_ℓ, c'est-à-dire de la tendance du terrain. Or, comme le verra au chapitre suivant, il existe une méthode simple qui permet de déterminer la fréquence de visibilité en connaissant uniquement la tendance et la propriétés statistiques du mouvement résiduel. C'est pourquoi on va plutôt s'attacher ici à donner une expression simplifiée de $E\left[p_v(N,h_o,h_n)\right]$ en supposant que le mouvement lent est, lui aussi, défini par ses propriétés statistiques : loi de répartition gaussienne tronquée de paramètres m_f, σ_f, T_f, T'_f et fonction de corrélation ϕ_θ (avec θ_f comme rayon de corrélation). Faute de données expérimentales suffisantes, cette hypothèse n'a pu être vérifiée ; toutefois, si l'on considère des terrains de grandes dimensions (quelques centaines de km de côté), il paraît vraisemblable d'admettre que, à cette échelle, la tendance n'est elle même qu'un mouvement résiduel par rapport à des plissements de plus grande amplitude.

3-2- DETERMINATION DE $E\left[p_v(D,h_o,h_n)\right]$

Supposons tout d'abord que l'amplitude de la tendance soit très faible ($\sigma_f \simeq 0$). Dans ce cas les paramètres statistiques du terrain sont pratiquement confondus avec ceux du mouvement résiduel : la probabilité de visibilité est donc donnée par une formule tout à fait comparable à la formule (60), en remplaçant h_1 par h_n, q_o par N et u_o, u'_o, v_o, v'_o par des termes u_n, u'_n, v_n, v'_n qui n'en diffèrent que par le fait que l'on a substitué h_n à h_1 dans les expressions (58). Par contre si le mouvement résiduel est de très faible amplitude ($\sigma_g \simeq 0$), tout se passe comme si l'on avait étiré le terrain dans le rapport des rayons de corrélation du mouvement lent (ρ_f) et du mouvement résiduel (ρ_g). Si l'on pose alors :

(78)
$$N' = N \frac{\rho_g}{\rho_f}$$

on voit aisément que la probabilité de visibilité est encore donnée par une expression analogue à la formule (60), en remplaçant q_o par N' , h_1 par h_n, σ_g par σ_f et u_o, u'_o, v_o, v'_o par des termes u_n, u'_n, v_n, v'_n qui n'en diffèrent que par le fait que l'on a substitué h_n à h_1 et l'indice f à l'indice g dans les formules (58).

Par suite, lorsque σ_g et σ_f sont différents de zéro, il paraît légitime de poser :

(79)
$$D = N_a \rho_a$$

$$u = \frac{\rho_a \operatorname{tg}\alpha_{max}}{\sqrt{2}\ \sigma_a}$$

$$u_n = u\left[1 - \frac{h_n}{(T_a + T'_a)\ \sigma_a}\right]$$

$$u'_n = u\left[1 - \frac{h_o}{(T_a + T'_a)\ \sigma_a}\right]$$

$$v_n = \inf\left(u_n, \frac{h_o}{\sqrt{2}\ \sigma_a}\right)$$

$$v'_n = \inf\left(u'_n, \frac{h_n}{\sqrt{2}\ \sigma_a}\right)$$

ρ_a, σ_a, T_a et T'_a étant les paramètres statistiques de la portion de coupe comprise entre A_o et A_n, et d'écrire :

$$E\left[p_v(D,h_o,h_n)\right] \simeq 1 - \int_{-N_a u_n}^{0} \left[1 - \frac{1}{2} K'_{N_a}\left(\frac{h_n}{\sqrt{2}\,\sigma_a},-\theta\right)\right] p\left(\theta + \frac{h_o-h_n}{\sqrt{2}\,\sigma_a}\right) d\theta$$

$$- \int_{0}^{N_a u'_n} \left[1-\frac{1}{2}K_{N_a}\left(\frac{h_o}{\sqrt{2}\,\sigma_a},\theta\right)\right] p\left(\theta+\frac{h_o-h_n}{\sqrt{2}\,\sigma_a}\right) d\theta + \int_{-N_a v_n}^{0} \frac{1}{2}K_{N_a}\left(\frac{h_o}{\sqrt{2}\sigma_a},\theta\right)\lambda_{N_a}\left(\frac{h_o}{\sqrt{2}\sigma_a},\theta\right) p\left(\theta+\frac{h_o-h_n}{\sqrt{2}\,\sigma_a}\right) d\theta$$

$$+ \int_{0}^{N_a v'_n} \frac{1}{2} K'_{N_a}\left(\frac{h_n}{\sqrt{2}\,\sigma_a},\theta\right) \lambda'_{N_a}\left(\frac{h_n}{\sqrt{2}\,\sigma_a},-\theta\right) p\left(\theta+\frac{h_o-h_n}{\sqrt{2}\,\sigma_a}\right) d\theta$$

Lorsque la distance D entre A_o et A_n est faible, le mouvement lent est assimilable à un segment de droite et on a par conséquent $\rho_a \simeq \rho_g$, $\sigma_a \simeq \sigma_g$, $T_a \simeq T_g$, et $T'_a \simeq T'_g$. Par contre, si la distance D est suffisamment grande pour que la tendance ait une influence normale, on peut poser $\rho_a = \rho$, $\sigma_a = \sigma$, $T_a = T$, $T'_a = T'$, avec :

(81)
$$\left|\begin{array}{l} \sigma^2 \simeq \sigma_g^2 + \sigma_f^2 \\ T\sigma \simeq T_g\,\sigma_g + T_f\,\sigma_f \\ T'\sigma \simeq T'_g\,\sigma_g + T'_f\,\sigma_f \\ \sigma^2\rho \simeq \sigma_g^2\,\rho_g + \sigma_f^2\,\rho_f \end{array}\right.$$

La dernière des relations (81), qui n'est d'ailleurs qu'une approximation, peut se déduire de la formule (15). En effet on a, quel que soit k :

$$\sigma^2 C_k \simeq \sigma_g^2\,\psi_k + \sigma_f^2\,\phi_k$$

d'où :

(82)
$$\sigma^2 S \simeq \sigma_g^2\,S_g + \sigma_f^2\,S_f$$

S, S_g, S_f étant les surfaces comprises entre les courbes d'autocorrélation $C(\theta)$, $\psi(\theta)$, $\phi(\theta)$ - relatives respectivement à la coupe globale, la tendance et le mouvement résiduel - et l'axe des abscisses (figure 62). Par conséquent, pour les distances moyennes, on aura les inégalités suivantes ;

$$\sigma_g^2 \leqslant \sigma_a^2 \leqslant \sigma_g^2 + \sigma_f^2$$

(83)

$$\rho_g \leqslant \rho_a < \frac{\sigma_g^2 \rho_g + \sigma_f^2 \rho_f}{\sigma_g^2 + \sigma_f^2} \leqslant \rho_f$$

Or l'écart-type des altitudes de la portion de tendance comprise entre A_o et A_n (comptées par rapport à la droite lissante) est une fonction monotone non décroissante de la distance $D = A_o A_n$, c'est-à-dire du nombre d'altitudes prises en considération : il est voisin de zéro pour les très courtes distances et égal à σ_f pour les distances suffisamment grandes. On peut donc écrire :

(84)

$$\sigma_a^2 = \sigma_g^2 + a(D)\, \sigma_f^2$$

$$\rho_a = \frac{\sigma_g^2 \rho_g + a(D)\, \sigma_f^2 \rho_f}{\sigma_g^2 + a(D)\, \sigma_f^2}$$

$a(D)$ étant une fonction monotone non décroissante comprise entre 0 et 1. Par suite ρ_a est une fonction de D monotone non décroissante (figure 63).

Notons que les valeurs de D doivent être telles que $N_a(D) = \frac{D}{\rho_a(D)}$ soit entier ; si tel n'est pas le cas, il faut calculer la probabilité de visibilité pour les deux valeurs entières qui encadrent $\frac{D}{\rho_a(D)}$ puis effectuer une interpolation.

En conclusion, on peut dans tous les cas utiliser une formule analogue à la formule (60), à condition de prendre pour unité de longueur (c'est-à-dire pour longueur de palier) un rayon de corrélation ρ_a variable avec la distance horizontale entre l'observateur et l'observé.

Dans le cas particulier où $h_o = h_n = 0$ on a, puisque N_a est au moins égal à 2 (sinon il suffirait de prendre la formule 60), une expression tout à fait comparable à la relation (64) :

$$E\left[p_v(D,0,0)\right] \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{T_a+T'_a}{\sqrt{2}}} \prod_{k=1}^{N_a-1} F\left(\frac{k}{N_a}\theta\right) e^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta \qquad (85)$$

avec

$$T_a+T'_a = \frac{(T_g+T'_g)\sigma_g + a(D).(T_f+T'_f)\sigma_f}{\sigma_g + a(D)\sigma_f} \qquad (86)$$

3-3- REMARQUES

a) Dans les expressions (79) le terme $\frac{tg\alpha_{max}}{\sigma_a}$ dépend peu de D puisqu'une affinité sur les altitudes le laisse invariant. Comme u est voisin de 2 dans le cas où n=1, on a approximativement $u=2\frac{\rho_a}{\rho_g} > 2$.

b) Dans tout ce qui précède on n'a pas tenu compte de la rotondité de la terre. Pour introduire l'effet de la courbure terrestre il suffit de remplacer, dans la relation (80), l'altitude $z_{o,k}$ de chaque point d'abscisse $k\rho_a$ par $z_{o,k} - \frac{k^2\rho_a^2}{2R}$ (R étant le rayon de la terre corrigé du coefficient de réfraction de l'atmosphère) ; celà signifie en définitive qu'il faut remplacer, dans chaque facteur, $\frac{k}{N_a}$ par $\frac{k}{N_a} - \frac{k(N_a-k)\rho_a^2}{2\sqrt{2}\,R\,\sigma_a}$ (figure 64) et prendre successivement comme bornes des intégrales :

$$(-N_a u_n - \frac{N_a^2\rho_a^2}{2\sqrt{2}R\sigma_a}, -\frac{N_a^2\rho_a^2}{2\sqrt{2}R\sigma_a}) \;,\; (\frac{N_a^2\rho_a^2}{2\sqrt{2}R\sigma_a}, N_a u'_n + \frac{N_a^2\rho_a^2}{2\sqrt{2}R\sigma_a}) \;,\; (-N_a v_n + \frac{N_a^2\rho_a^2}{2\sqrt{2}R\sigma_a}, \frac{N_a^2\rho_a^2}{2\sqrt{2}R\sigma_a})$$

$$\text{et } (-\frac{N_a^2\rho_a^2}{2\sqrt{2}R\sigma_a}, N_a v'_n - \frac{N_a^2\rho_a^2}{2\sqrt{2}R\sigma_a}).$$

En particulier la probabilité d'intervisibilité de deux points situés en des points hauts du sol et à grande distance l'un de l'autre est donnée par :

$$E\left[p_v(D,0,0,T_s)\right] \sim \frac{M}{\left[G(T_a)-G(T_s)\right]^2} \int_{\frac{N_a^2\rho_a^2}{2\sqrt{2}R\sigma_a}}^{\frac{T_a-T_s}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{k=1}^{N_a-1} F\left\{\left[\frac{k}{N_a}\theta - \frac{k(N_a-k)\rho_a^2}{2\sqrt{2}R\,\sigma_a} - \mu_o(T_s)\right]\frac{1}{\nu_o(T_s)}\right\}$$

$$\left[G(T_a\sqrt{2}-\theta) - G(T_s\sqrt{2}+\theta)\right] e^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta$$

puisque la borne supérieure $\frac{T_a - T_s}{\sqrt{2}}$ est, dans ce cas, inférieure à $N_a u + \frac{N_a^2 \rho_a^2}{2R}$. Cette expression est à comparer avec la formule (85) établie sans tenir de la rotondité de la terre.

4 - COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

Les diverses formules précédentes peuvent être traitées par ordinateur ; toutefois le calcul n'a été fait, à titre de vérification, que dans des cas particuliers ($n = 1$, $h_o = h_1 = 0$, q_o quelconque ; $n = 1$, $q_o = 1$, h_o et h_1 quelconques).

a) Pour $n = 1$, $h_o = h_1 = 0$, on a effectué la comparaison entre les valeurs du tableau 9 et les valeurs relevées sur les courbes 28 à 33 ($\frac{h}{\sigma} = 0$). Les tableaux 12 et 13 résument les résultats obtenus (1).

	ORLEANS		SAULIEU		SAINT FLOUR		MOYENNES
	0°	90°	0°	90°	0°	90°	
Distance pour $p_v = 0,52$	425m	750m	325m	300m	325m	300m	400m
Distance pour $p_v = 0,32$	825m	1650m	650m	625m	600m	660m	816m
$d_{0,32} / d_{0,52}$	1,94	2,2	2	2,1	1,84	2,2	2,04
Distance pour $p_v = 0,21$	1100m	2350m	900m	925m	1075m	1125m	1260m
$d_{0,21} / d_{0,52}$	2,6	3,14	2,76	3,1	3,3	3,75	3,15
Distance pour $p_v = 0,095$	2350m	3850m	1850m	1900m	2125m	2500m	2500m
$d_{0,095} / d_{0,52}$	5,5	5,15	5,7	6,33	6,55	8,35	6,25
Distance pour $p_v = 0,045$	3875m	5500m	3100m	3100m	5500m	4500m	4540m
$d_{0,045} / d_{0,52}$	9,1	7,35	9,55	10,3	16,8	15	11,35
Distance pour $p_v = 0,017$	8100m	9000m	5600m	6600m	10000m	8000m	8300m
$d_{0,017} / d_{0,52}$	19	12	17,2	22	30	25,6	20,97

TABLEAU 12

(1) Cette confrontation entre résultats théoriques et expérimentaux permet de préciser l'ordre de grandeur de $(q_o)_{max}$ ainsi que la valeur à attribuer à ρ_a dès que $D > (q_o)_{max} \rho_g$.

$\frac{D}{\rho_g}$	1	2,04	3,15	6,25	11,35	20,97
q_o	1	2	3	5	7	10
p_v	0,52	0,32	0,21	0,095	0,045	0,017
$\overline{(\frac{\rho_a}{\rho_g})}$	1	1,02	1,05	1,25	1,62	2,1

TABLEAU 13

Lorsque la distance est faible la comparaison est extrêmement satisfaisante, compte tenu de l'imprécision des courbes expérimentales et des approximations effectuées tant sur la fonction d'autocorrélation que sur le mouvement lent. Par contre, pour les distances plus élevées, la probabilité théorique calculée pour n = 1 (formule 60) devient inférieure à la valeur expérimentale, ce qui d' ailleurs est bien normal ainsi qu'on l'a montré au paragraphe 3-2-. La figure 65 donnent la variation du rapport $(\frac{\rho_a}{\rho_g})$ en fonction de la distance exprimée en nombre de fois ρ_g : on notera que la valeur maximale théorique $\overline{(\frac{\rho}{\rho_g})}$ de $\overline{(\frac{\rho_a}{\rho_g})}$ est voisine de 3, ainsi qu'on le montrera au paragraphe b) suivant .

b) La distance correspondant à $p_v = 0,52$ est par définition égale au rayon de corrélation ρ_g. La valeur moyenne $\overline{\rho_g}$ obtenue ici (environ 400m) est égale à très peu de chose près à la valeur θ telle que $\psi_\theta = 0,7$ (figure 16).

Si maintenant on cherche, sur les courbes de corrélation C_θ correspondant aux coupes globales, la valeur θ telle que $C_\theta = 0,7$, on obtient pour valeur moyenne de ρ:

1500 m à Orléans,
830 m à Saulieu,
920 m à Saint Flour,

soit en moyenne $\overline{\rho}$ = 1100 m. Or, d'après la relation (81), on a :

$$\overline{(\frac{\rho}{\rho_g})} \simeq \frac{\sigma_f^2}{\sigma^2} \overline{(\frac{\rho_f}{\rho_g})} + \frac{\sigma_g^2}{\sigma^2}$$

puisque les rapports $\frac{\sigma_f}{\sigma}$ et $\frac{\sigma_g}{\sigma}$ dépendent peu de la région considérée ; en outre, les mouvements lent et résiduel étant non corrélés, on peut écrire :

$\overline{\left(\frac{\rho_f}{\rho_g}\right)} \simeq \frac{\overline{\rho_f}}{\overline{\rho_g}}$, d'où $\left(\overline{\frac{\rho}{\rho_g}}\right) \propto \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho_g}} \simeq \frac{1100}{400} \simeq 2,75$ (figure 65).

c) Le calcul numérique de la probabilité de visibilité dans le cas général où les points A_o et / ou A_n sont à des hauteurs h_o et h_n au dessus du sol n'a pas été fait, sauf dans le cas très particulier où $n = 1$, $q_o = 1$ (voir tableaux 10 et 11).

La comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux obtenus pour une distance de 400m (donc égale à ρ_g) et différentes valeurs de h_o - l'autre point étant situé au sol - est assez malaisée. En effet, lors de l'étude expérimentale, la hauteur de A_o au dessus du sol a été, pour des raisons pratiques, normalisée par rapport à l'écart-type σ de la totalité de chacune des coupes considérées et non par rapport à l'écart-type σ_g du mouvement résiduel situé entre a_o et a_1. En outre, on a supposé, lors du calcul, que le mouvement résiduel était stationnaire et que par suite les paramètres σ_g, T_g et T'_g ne dépendaient pas de la position du segment a_o a_1. En réalité il n'en est pas ainsi et il aurait fallu considérer ces paramètres comme des v.a, ce qui aurait conduit à une formulation très complexe. On notera toutefois que les inconvénients mentionnés ci-dessus disparaissent lorsque l'observateur et l'observé sont au sol puisqu'alors les termes contenant l'écart-type sont nuls.

Quoiqu'il en soit la bonne concordance entre résultats théoriques et expérimentaux lorsque A_o et A_n sont au sol laisse penser que la formule (80), qui traite du cas général, est correcte, du moins lorsque les coupes de terrain peuvent être considérées comme la superposition de deux processus aléatoires indépendants, chacun d'eux étant gaussien tronqué, stationnaire et ergodique.

CHAPITRE III

DETERMINATION DE L'INTERVISIBILITE A PARTIR DE COUPES DE TERRAIN SIMULEES

1- DEFINITION DE LA METHODE

La méthode utilisée ici consiste à générer des coupes de terrain synthétiques selon un procédé analogue à celui décrit dans la 2ème partie, chapitre II. Pour déterminer la probabilité d'intervisibilité de deux points A et B on peut tout d'abord procéder comme au chapitre I, c'est-à-dire considérer un ensemble de coupes parallèles à une même direction : chaque coupe sera alors la superposition de la tendance réelle du terrain le long de la coupe et d'un mouvement résiduel généré à partir des paramètres statistiques du terrain résiduel. Cette méthode, qui utilise la tendance réelle du terrain, ne pose pas de problèmes particuliers. Disons seulement qu'elle permet, à partir d'un volume réduit de données expérimentales, d'obtenir des fréquences de visibilité proches des fréquences réelles.

Malgré les mérites de la méthode précitée on a étudié un autre procédé qui permet de réduire encore le volume de données expérimentales nécessaires au programme de calcul. Pour déterminer la fréquence de visibilité relative à un ensemble de coupes parallèles à une direction Ou on procède comme suit :

a) On introduit, pour chacune des coupes, la tendance sous une forme déduite de celle indiquée dans la 2ème partie, chapitre II, paragraphe 4-2-. Par exemple, si Ou est parallèle à Ox (lignes), la tendance moyenne est définie par une suite d'altitudes m_i (formule 19). Or, ainsi qu'on l'a vu, la variance moyenne des mouvements lents relatifs aux coupes parallèles à Ou est plus grande que la variance de la tendance moyenne (formule 25 et 26) : ainsi, dans le cas des lignes, on détermine $\overline{\sigma^2_{fj}}$ par :

$$\overline{\sigma^2_{fj}} = \overline{(m_i - m)^2} + K^2$$

avec

$$K^2 = \sigma^2_f - \overline{(m_i - m)^2} - \overline{(m_j - m)^2}$$

Par suite la tendance de chacune des coupes sera constituée d'une suite de points d'altitude :

$$m'_i - m = (m_i - m)\sqrt{\frac{\overline{\sigma^2_{fj}}}{(m_i-m)^2}} = (m_i - m)\sqrt{1 + \frac{K^2}{(m_i-m)^2}}$$

(on peut admettre, en première approximation, que K^2 ne dépend pas de la direction Ou).

En pratique, les valeurs obtenues pour les différents coefficients entrant dans le calcul de $m'_i - m$ et $m'_j - m$ sont données par le tableau suivant :

	ORLEANS	SAULIEU	SAINT FLOUR
$\sqrt{\overline{(m_i-m)^2}}$	2,1m	18,7m	38,9m
$\sqrt{\overline{(m_j-m)^2}}$	9m	18,7m	26,7m
K	4,6	50	62,5
$\sqrt{1 + \frac{K^2}{(m_i-m)^2}}$	2,4	2,8	1,9
$\sqrt{1 + \frac{K^2}{(m_j-m)^2}}$	1,12	2,8	2,55
$\sqrt{\sigma^2_{fi}}$	5m	53m	74m
$\sqrt{\sigma^2_{fj}}$	10m	53m	67,5m

TABLEAU 14

b) On détermine ensuite le mouvement résiduel aléatoire, caractéristique de la région et de la direction considérées, que l'on superpose à la tendance avec une phase aléatoire.

c) On détermine, pour chaque coupe ainsi créée, si deux points A et B distants de D sont ou non en visibilité.

d) On recommence le processus un certain nombre de fois (en pratique : 400) de manière à calculer la fréquence de visibilité moyenne et les pourcentages moyens de parties vues.

Pour la génération des mouvements résiduels on a utilisé une seule fonction ψ_θ pour l'ensemble des cas traités (figure 16) ; cette simplification est légitime car la probabilité de visibilité dépend en définitive assez peu de la valeur des coefficients ψ_k. Dans le même ordre d'idée d'ailleurs la fonction ψ_θ a été simplifiée en supposant $\psi_\theta = 0$ pour $\theta \geqslant \theta_4$ (ici 5 km).

Quant aux paramètres σ_{gc}, T_{gc}, et T'_{gc}, ils sont pour chaque coupe tirés dans des lois de Gauss tronquées à ± 2,5 fois l'écart-type. Le tableau suivant résume les valeurs retenues pour la moyenne et l'écart-type de chacun des paramètres:

	ORLEANS	SAULIEU	SAINT FLOUR
MOY σ_{gc}	3,4m	28m	38m
SIGMA σ_{gc}	1,2m	7m	14m
MOY T_{gc}	2,70	2,35	2,30
SIGMA T_{gc}	0,55	0,45	0,40
MOY T'_{gc}	2,45	2,85	2,60
SIGMA T'_{gc}	0,55	0,60	0,60

TABLEAU 15

Il est à noter que m_{gc} a été choisi égal à zéro.

2 - DETERMINATION DE LA FREQUENCE DE VISIBILITE

La fréquence de visibilité a été déterminée sur des coupes Est-Ouest définies selon le procédé décrit au paragraphe 1 ci-dessus dans un certain nombre de cas.

a) L'observateur A et l'observé B sont quelconques au sol ou au dessus du sol. Si le procédé utilisé est correct, les résultats obtenus doivent être très voisins de deux donnés par la méthode purement expérimentale. Or, comme on l'a vu dans la 2ème partie, chapitre III, paragraphe 5-3-, la génération des coupes de terrain nécessite, pour être tout à fait satisfaisante, l'introduction d'une condition supplémentaires : si $|z_{\ell+k}-z_{\ell}| \leqslant \alpha$ pour $0 < k \leqslant k_o$, on remplace $z_{\ell+k}$ par z_{ℓ}, ce qui permet d'obtenir des plateaux de longueur inférieure ou égale à $k_o\tau$ au lieu d'un sol très mouvementé.

Les paramètres α et k_o ont été ajustés afin que les courbes déterminées sur terrains réel et synthétique soient aussi identiques que possible. La comparaison conduit à choisir comme valeur de α l'écart entre les courbes de niveau de la carte au 1/25 000 (2,5m à Orléans, 5m à Saulieu et 10m à Saint-Flour), ce qui paraît somme toute assez normal ; quant à k_o il a été pris égal à 4.

Dans ces conditions la fréquence de visibilité, fonction de la distance D entre A et B ainsi que des hauteurs de A et B normées par rapport à l'écart-type des coupes, est représentée par les courbes des figures 69 à 71. On peut constater que la correspondance entre ces courbes et celles des figures 28, 30 et 32 est très bonne. Le procédé mis au point peut donc être considéré comme satisfaisant.

b) L'observateur est en un point choisi au sol ou au dessus du sol et l'observé est en un point quelconque. Les courbes, déterminées pour des rayons de choix de 0,5 et 2km, montrent que la probabilité de visibilité augmente avec le rayon de choix R mais tend vers une limite pour les fortes valeurs de R : cette saturation est due au fait que la loi de distribution des altitudes est tronquée (figure 72 à 77).

c) L'observateur est en un point choisi du sol et l'observé est en point choisi au dessus du sol. Les courbes correspondantes (figures 78 à 83) sont comparables à celles obtenues précédemment.

d) L'observateur et l'observé sont en des points choisis du sol. Les courbes ont été déterminées pour deux valeurs du rayon de choix (0,5 et 2 km), R étant dans chaque cas le même pour les deux points. Là encore la probabilité de visibilité augmente sensiblement avec R mais tend vers une limite (figures 84 à 86)

3 - COMPARAISON AVEC LES METHODES EXPERIMENTALE ET THEORIQUE

Le procédé expérimental est bien entendu le plus précis puisque l'on ne fait aucune hypothèse simplificatrice. Il nécessite toutefois de digitaliser complètement les terrains pris en considération ce qui, comme on l'a vu, conduit à un travail de relevé de cartes assez considérable ainsi qu'à un encombrement prohibitif de la mémoire du calculateur.

La méthode utilisant des coupes de terrain synthétiques donne, statistiquement parlant, des résultats très proches des précédents tout en ne nécessitant qu'un effort limité pour le relevé de cartes (quadrillage lâche sur toute la région considérée et détermination, par prélèvement, des caractéristiques statistiques du mouvement résiduel).

Quant au calcul probabiliste de l'intervisibilité, il ne fait appel qu'aux paramètres statistiques du terrain. Il est particulièrement bien adapté à l'étude paramétrique des performances d'un système lié au sol mais il ne convient généralement pas à l'évaluation des systèmes par simulation en temps réel, car alors on cherche plutôt à introduire des terrains vrais.

Le choix de l'une ou l'autre méthode dépendra donc essentiellement de la nature du problème traité, étant entendu que dans certains cas il demeure possible de les utiliser conjointement.

4e PARTIE

EXTENSIONS DE L'ETUDE DU TERRAIN

CHAPITRE I

ECHOS DE SOL RADAR

1- INTRODUCTION

Le problème des échos radar parasites est extrêmement général. Ce phénomène, que l'on désigne souvent par le mot anglais "clutter", peut avoir des origines diverses (sol, mer, pluie, nuages, etc ...). Il a pour conséquences directes soit de diminuer la probabilité de détection du radar (car la cible peut être étouffée par le clutter), soit d'augmenter la probabilité de fausse alarme (car un écho parasite risque d'être confondu avec la cible réelle).

Dans ce qui suit on se limitera au problème du "clutter de sol" et au cas particulier des radars à impulsions : comment prévoir, pour un radar à impulsions, le niveau moyen et la distribution des échos de sol connaissant les caractéristiques du radar et celles du terrain.

2 - APPROCHE THEORIQUE DE LA DETERMINATION DES ECHOS DE SOL

2-1- RAPPELS

Soit G_o le gain maximal de l'antenne et $g(\theta,\phi)$ le diagramme d'antenne normalisé : $g(0,0) = 1$, $0 \leqslant g(\theta,\phi) \leqslant 1$, $g(\theta)=g(-\theta)$. Soit en outre (A,x,y,z) un trièdre droit ayant pour origine le centre de l'antenne (Az vertical), α_o et β_o les angles définissant la direction de l'axe de l'antenne, α et β une direction quelconque Au (figure 87a et 87b), avec:

(88)

$$\theta = \alpha - \alpha_o$$
$$\phi = \beta - \beta_o$$

Le gain de l'antenne dans la direction Au est donné par :

(89) $$G = G_o \cdot g(\theta,\phi) = G_o \cdot g(\alpha-\alpha_o\ ,\ \beta-\beta_o)$$

Dans ces conditions la puissance d'écho de sol $P_R(\alpha,\beta)$ reçue dans la direction Au est :

(90) $$P_R(\alpha,\beta) = \frac{P_E\ G_o^2\ \lambda^2\ g^2(\theta,\phi)\ S_R(\alpha,\beta)}{(4\pi)^3\ D^4} = K\ \frac{g^2(\theta,\phi)\ S_R(\alpha,\beta)}{D^4}$$

où P_E est la puissance d'émission,
λ est la longueur d'onde de l'émission,
D est la distance entre le radar et la cible,
$S_R(\alpha,\beta)$ est la surface équivalente radar du sol dans la direction Au,
K est un coéfficient ne dépendant que des caractéristiques du radar.

Or, dans le cas des radars à impulsions, la cellule élémentaire de distance est $\Delta D = \frac{c\ T}{2}$, où c est la vitesse de la lumière et T la longueur de l'impulsion radar (pour T = 1 µs, ΔD = 150m). Si par ailleurs (figure 88) on désigne par $\Delta\alpha$ l'angle élémentaire en gisement et par S_o la portion de surface frontale (c'est-à-dire projetée perpendiculairement à Au) comprise dans l'angle $\Delta\alpha$ et dans la cellule de distance (D,D - ΔD), on peut écrire :

(91) $$S_R(\alpha,\beta) = \gamma(\alpha,\beta)\ \ S_o(\alpha,\beta)$$

relation où $\gamma(\alpha,\beta)$ représente le pouvoir réfléchissant du sol dans la direction Au. Le coefficient $\gamma(\alpha,\beta)$ a une valeur moyenne γ comprise entre 0,1 et 0,3 selon la nature du terrain et sa fonction de répartition à l'allure représentée sur la figure 89.

2-2- DETERMINATION THEORIQUE DU NIVEAU DE CLUTTER

A partir des résultats précédents, admis par la plupart des auteurs [36], on a essayé de prévoir le niveau de clutter connaissant les caractéristiques du radar et celles du terrain en présence duquel se trouve placé le radar.

Soit h_A la hauteur du radar au dessus d'un point du sol d'altitude z_A, $D = n\tau$ la distance moyenne de la cellule élémentaire comptée à partir de l'antenne, $\Delta D = m\tau$ la longueur de cette cellule, $P'_n(\alpha)$ le pourcentage de parties vues dans la surface $n\tau\Delta\alpha.m\tau$ (figure 90).

La contribution à la surface $S_o(\alpha,\beta)$ de chaque facette élémentaire non vue du radar est égale à zéro ; par contre la contribution de chaque facette élémentaire vue est égale à :

$$\Delta S_o(\alpha,\beta) = \frac{\Delta S_T . \sin(\delta-\beta)}{\cos\delta} \qquad \text{(figure 91)} \tag{92}$$

avec :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta S_T = \text{projection horizontale de la facette de terrain} \\ tg\delta = s \text{ (pente de la facette)} \\ tg\beta = -\dfrac{h_A + z_A - z_B}{n\tau} \end{array} \right. \tag{93}$$

Donc la relation (92) s'écrit encore :

$$\Delta S_o(\alpha,\beta) = \Delta S_T . (tg\delta\cos\beta - \sin\beta) \tag{94}$$

Lorsque l'angle β est faible, c'est-à-dire que le radar est situé à une hauteur au dessus du sol faible devant la distance $n\tau$, on peut écrire :

$$\Delta S_o(\alpha,\beta) \simeq \Delta S_T . \left(s + \frac{h_A + z_A - z_B}{n\tau}\right) \tag{95}$$

d'où, en sommant sur la totalité de la surface $n\tau\Delta\alpha.m\tau$:

$$S_o(\alpha,\beta) \simeq nm\tau^2\Delta\alpha\left(\hat{s}_n + \frac{h}{n\tau}\right).P'_n(\alpha) \tag{96}$$

avec :

$$\left| \begin{array}{l} \hat{s}_n = \displaystyle\int_{-\frac{h}{n\tau}}^{s_{max}} s\, p(s)\, ds \quad , \; p(s) \text{ étant la densité de probabilité de } s \\ \\ h = \overline{(h_A + z_A - z_B)} = h_A + z_A - \overline{z_B} \end{array} \right. \tag{97}$$

Or on a vu dans la 2ème partie, chapitre I, paragraphe 3-5-, que la pente s suit une loi de Gauss tronquée de moyenne m_s et de variance $\sigma_s^2 = \frac{2}{\tau^2}\ \sigma^2(1-C_1) - m_s^2 = 2\mu^2\sigma^2 - m_s^2$. On a donc :

$$p(s) = \frac{\Lambda}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_s}\ e^{-\frac{(s-m_s)^2}{2\sigma_s^2}} \tag{98}$$

(Λ est égal à $1+\varepsilon$ dans l'intervalle $\left[s_{max}\ ,\ s_{min} \simeq -s_{max}\right]$ et à 0 en dehors de cet intervalle) et, en supposant que le terrain est horizontal en moyenne (c'est-à-dire que $m_s = 0$), il vient :

$$\hat{s}_n = \frac{\Lambda}{2\sqrt{\pi}\mu\sigma}\int_{-\frac{h}{n\tau}}^{s_{max}} s\ e^{-\frac{s^2}{4\mu^2\sigma^2}}\ ds = \frac{\Lambda\mu\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{h}{n\tau}}^{s_{max}} e^{-\frac{s^2}{4\mu^2\sigma^2}}\ d\left(\frac{s^2}{4\mu^2\sigma^2}\right)$$

soit :

$$\hat{s}_n \simeq \frac{\mu\sigma}{\sqrt{\pi}}\ e^{-\frac{h^2}{4n^2\tau^2\mu^2\sigma^2}} \tag{99}$$

Donc $S_o(\alpha,\beta)$ peut s'écrire :

$$S_o(\alpha,\beta) \simeq hm\tau\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{\sqrt{2}\ n\ \tau\ \mu\ \sigma}{h}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sqrt{2}\ n\tau\mu\sigma}\right)^2}\right] P'_n(\alpha).\ \Delta\alpha \tag{100}$$

Posons alors :

$$\boxed{\frac{h}{\sqrt{2}\ n\ \tau\mu\sigma} = a} \tag{101}$$

valeur que l'on suppose indépendante de α ; il vient :

$$\boxed{S_o(\alpha,a) = h\ m\ \tau\ \left(1 + \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a\ \sqrt{2\pi}}\right)\ .\ P'_n(\alpha)\ .\ \Delta\alpha} \tag{102}$$

Par conséquent le niveau de clutter lorsque l'antenne se trouve dans la direction α_o, pour la distance D=n τ considérée, est donné par :

$$(103) \qquad P_R(\alpha_o,n) = \frac{K\,h\,m\tau}{(n\tau)^4}\left(1+\frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a\sqrt{2\pi}}\right)\int_{\alpha_o-\pi}^{\alpha_o+\pi}\gamma(\alpha,\beta)\,g^2(\alpha-\alpha_o,\beta-\beta_o)P'_n(\alpha)\,d\alpha$$

en intégrant sur la totalité du diagramme d'antenne. Posons :

$$P'_{n(\alpha)} = P'_n + \Delta P'(\alpha)$$

$$\gamma(\alpha,\beta) = \gamma + \Delta\gamma_n(\alpha)$$

$\Delta\theta$ = ouverture à 3 dB du diagramme d'antenne

$$\int_{\alpha_o-\frac{\Delta\theta}{2}}^{\alpha_o+\frac{\Delta\theta}{2}} g^2(\alpha-\alpha_o\ ,\ \beta-\beta_o)\,d\alpha = g_1\,\Delta\theta$$

$$\int_{\alpha_o-\pi}^{\alpha_o+\pi} g^2(\alpha-\alpha_o\ ,\ \beta-\beta_o)\ \ d\alpha = g_2\,\Delta\theta\quad ,\quad \text{avec } \frac{g_1}{g_2} = k$$

en supposant que le diagramme d'antenne varie peu en fonction de β, du moins pour les faibles valeurs de cet angle, on obtient alors approximativement :

$$P_R(\alpha_o,n) = \frac{Khm\tau}{(n\tau)^4}\left(1+\frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a\sqrt{2\pi}}\right)\int_{\alpha_o-\pi}^{\alpha_o+\pi}\gamma\left[1+\frac{\Delta\gamma_n(\alpha_o)}{\gamma}\right]\cdot P'_n\left[1+\frac{\Delta P'_n(\alpha_o)}{P'_n}\right]\cdot g^2(\alpha-\alpha_o\ ,\ \beta-\beta_o)\,d\alpha$$

soit :

$$(\ ) \qquad P_R(\alpha_o,n) = \frac{Khm\tau}{(n\tau)^4}\left(1+\frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a\sqrt{2\pi}}\right)\gamma\,P'_n\,g_2\,\Delta\theta\left[1+\frac{g_1}{g_2}\left(\frac{\Delta\gamma_n(\alpha_o)}{\gamma}+\frac{\Delta P'_n(\alpha_o)}{P'_n}\right)\right]$$

puisque les fluctuations de $\gamma(\alpha,\beta)$ et $P'_n(\alpha)$ autour de γ et P'_n ont peu d'influence pour les valeurs de θ extérieures à l'intervalle $(-\frac{\Delta\theta}{2}, \frac{\Delta\theta}{2})$.

Comme $m\tau$ et $\Delta\theta$ ne dépendent que des caractéristiques du radar on posera :

(106) $$K_o = m\tau\ \Delta\theta = \frac{cT}{2}\Delta\theta$$

d'où :

(107) $$P_R(\alpha_o,n) = \frac{KK_o g_2}{(n\tau)^4} h\ \gamma\ P'_n\ \left(1+\frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a\sqrt{2\pi}}\right)\left[1+\frac{g_1}{g_2}\left(\frac{\Delta\gamma_n(\alpha_o)}{\gamma}+\frac{\Delta P'_n(\alpha_o)}{P'_n}\right)\right]$$

Par ailleurs, si une cible de surface apparente S se trouve dans le lobe principal de l'antenne, la puissance reçue est en moyenne (compte tenu du fait que l'axe de l'antenne peut être plus ou moins dépointé par rapport à l'axe visée radar-cible) :

(108) $$P_R(n) = \frac{K g_1 S}{(n\tau)^4}$$

Donc le rapport entre la puissance reçue de la cible et la puissanc d'écho de sol est :

(109) $$A_n = \frac{P_R(n)}{P_R(\alpha_o,n)} = \frac{k S}{K_o h P'_n\left(1+\frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a\sqrt{2\pi}}\right)\left[1+k\left(\frac{\Delta\gamma_n(\alpha_o)}{\gamma}+\frac{\Delta P'_n(\alpha_o)}{P'_n}\right)\right]}$$

A titre d'exemple, supposons que le diagramme d'antenne puisse être approximé par une expression de la forme :

(110) $$g(\theta,\phi) = \left[\frac{\sin\theta/\theta_o}{\theta/\theta_o}\right]^2$$

avec $\dfrac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}/\theta_o}{\frac{\Delta\theta}{2}/\theta_o} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire $\theta_o \simeq \dfrac{\Delta\theta}{2,784}$

Dans ces conditions on obtient :

$$g_1\ \Delta\theta \simeq \int_{-\frac{\Delta\theta}{2}}^{\frac{\Delta\theta}{2}} \left[\frac{\sin \frac{2{,}784\ \theta}{\Delta\theta}}{\frac{2{,}784\ \theta}{\Delta\theta}}\right]^4 d\theta = \frac{\Delta\theta}{1{,}392} \int_0^{1{,}392} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^4 du \simeq 0{,}688\ \Delta\theta$$

d'où (111) $g_1 \simeq 0{,}688$

De même

$$g_2\ \Delta\theta \simeq \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\sin \frac{2{,}784\ \theta}{\Delta\theta}}{\frac{2{,}784\ \theta}{\Delta\theta}}\right]^4 d\theta = \frac{\Delta\theta}{1{,}392} \int_0^{\frac{2{,}784\ \pi}{\Delta\theta}} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^4 du$$

soit, sous réserve que $\Delta\theta$ ne soit trop grand (en pratique il atteint quelques degrés au maximum) :

$$g_2 \simeq \frac{1}{1{,}392} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^4 du = \frac{2}{3 \times 1{,}392} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u \sin 2u}{u^3}\, du$$

d'où (112) $g_2 \simeq \frac{2}{3 \times 1{,}392} \times \frac{\pi}{2} \simeq 0{,}752$

et (113) $k = \frac{g_1}{g_2} \simeq 0{,}915$

Si l'on revient maintenant aux expressions (107) et (109) on remarque :

a) que m_τ est généralement faible (quelques centaines de mètres) et que par suite on peut confondre le pourcentage de parties vues P'_n avec la probabilité de visibilité p_n ;

b) que l'on peut relier la probabilité de visibilité au terme $\frac{h}{n\tau\sigma}$: en négligeant la rotondité de la terre, on a $p_n = F_2(\frac{h}{n\tau\sigma})$, où F_2 est la fonction de répartition des pentes du terrain normalisées par rapport à σ (voir 3ème partie, chapitre I, formule 52).

Par conséquent on peut écrire, d'après la relation (101) :

$$p_n = F_2(a\mu\sqrt{2}) \quad \text{(figure 92a)}$$

ou encore :

(114) $$a = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} F_2^{(-1)}(p_n) \quad \text{(figure 92 b)}$$

où $F_2^{(-1)}$ est la fonction inverse de F_2. Donc le terme $h(1 + \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a\sqrt{2\pi}})$ s'écrit :

(115) $$h\left(1 + \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a\sqrt{2\pi}}\right) = n\tau\sigma\left[F_2^{(-1)}(p_n) + \frac{\mu}{\pi} e^{-\frac{1}{4\mu^2}\left[F_2^{(-1)}(p_n)\right]^2}\right] = n\tau\sigma f(p_n)$$

L'allure de la courbe $f(p_n)$ est donnée par la figure 93.

Par conséquent il vient :

(116) $$P_R(\alpha_o, n) = \frac{K K_o g_2}{(n\tau)^3} \sigma \gamma p_n f(p_n) \left[1 + k\left(\frac{\Delta\gamma_n(\alpha_o)}{\gamma} + \frac{\Delta p_n(\alpha_o)}{p_n}\right)\right]$$

$$A_n = \frac{k S}{K_o n\tau\sigma\gamma p_n f(p_n)\left[1 + k\left(\frac{\Delta\gamma_n(\alpha_o)}{\gamma} + \frac{\Delta p_n(\alpha_o)}{p_n}\right)\right]}$$

avec :

(117) $$E\left[P_R(\alpha_o, n)\right] = \frac{K K_o g_2}{(n\tau)^3} \sigma \gamma p_n f(p_n)$$

$$E\left[A_n\right] = \frac{k S}{K_o \sigma \gamma p_n f(p_n) n\tau}$$

expressions qui permettent de relier l'amplitude de l'écho de sol et le rapport signal utile / signal parasite à la probabilité de visibilité optique entre le radar et la portion de sol considérée.

Si l'on exprime $\Delta\theta$ en degrés, la largeur d'impulsion T en microsecondes et les longueurs en mètres et si l'on suppose pour simplifier que le lobe d'antenne est donné par la relation (110), on obtient :

$$E\left[A_n\right] \frac{0,915\ S}{(150\ T)\ (17.10^{-3}\ \Delta\theta)\ \sigma\ \gamma\ p_n\ f(p_n)\ n\tau}$$

soit :

$$E\left[A_n\right] \simeq \frac{0,359\ S}{T\Delta\theta\sigma\gamma p_n\ f(p_n)\ n\tau}$$

ou encore, en fonction de la distance $D = n\tau$

(118)
$$\boxed{E\left[A_n\right] \simeq \frac{0,359\ S}{T\Delta\theta\sigma\gamma.p_v(D).f\left[p_v(D)\right].D}}$$

De même on obtient :

(119)
$$\boxed{E\left[P_R(\alpha_o,D)\right] \simeq K\ \frac{1,91\ T\Delta\theta\sigma\gamma.p_v(D).f\left[p_v(D)\right]}{D^3}}$$

CHAPITRE II

PROFAGATION D'ONDES RADIOELECTRIQUES DE SOL

1 - GENERALITES

Le calcul des liaisons radio ou herztiennes se traite normalement en déterminant l'affaiblissement de propagation A F et en écrivant la relation liant la puissance de l'émetteur, la sensibilité du récepteur et l'affaiblissement.

Il existe divers modes de propagation : ionosphérique, troposphérique ou par ondes de sol. Seul ce dernier mode sera abordé ici puisque, en définitive, c'est le seul qui soit lié au terrain.

La théorie de la propagation des ondes de sol est fort complexe dans le cas général mais néanmoins il existe un certain nombre de formulations simplifiées qui sont suffisantes dans la pratique. Une des méthodes les plus employées est celle de BULLINGTON. Le principe en est le suivant [37,38]:

a) Connaissant la distance D entre l'émetteur A_o et le récepteur A_n (exprimée en km) et la fréquence F_r de la liaison (exprimée en MHz), on calcule tout d'abord l'affaiblissement "d'espace libre"(1):

(120) $$A\,F_{o\,dB} = 32{,}5 + 20 \log D + 20 \log F_r$$

L'affaiblissement d'espace libre est le seul à prendre en considération si l'ellipse de FRESNEL est dégagée (figure 94). Rappelons que le rayon de l'ellipse de Fresnel exprimé en mètres, est :

(121) $$r\,(D_1) = 547 \sqrt{\frac{D_1\,(D - D_1)}{D\,F_r}}$$

---

(1) $$A\,F_{o\,dB} = -10 \log \frac{P_R}{P_E\,G_E\,G_R} = -10 \log \left[\frac{C}{4\pi} \cdot \frac{1}{10^{-6} F} \cdot \frac{1}{10^{-3}\,D}\right]$$

$$= 20 \log D + 20 \log F - 20 \log \frac{3.10^8}{4\pi.10^9} = 20 \log D + 20 \log F + 32{,}5$$

b) Si l'ellipse de Fresnel n'est pas dégagée, il faut ajouter à AF_0 un affaiblissement AF_1 dit "de terre unie" que l'on peut déterminer selon la méthode de Bullington, c'est-à-dire à l'aide d'abaques faisant intervenir la fréquence et les distances d_1, d_2, d_3 (figures 95 a et 95 b) : à chacune des trois distances d_i correspond un affaiblissement AF_1^i et l'on a :

$$A F_1 = \sum_{i=1}^{3} A F_1^i$$

en remarquant que AF_1^3 est pris positif quand $D > d_1 + d_2$ (figure 95 a) et négatif quand $D < d_1 + d_2$ (figure 95 b). La détermination de d_1 et d_2 se fait simplement à l'aide de la relation :

(122) $$\boxed{d_{km} \simeq 4{,}1 \sqrt{h_m}}$$

(en supposant le coefficient de réfraction de l'atmosphère égal à $\frac{4}{3}$) ; cependant la valeur réelle de h_o ou h_n n'est pas aisée à déterminer puisqu'elle dépend non seulement de la hauteur de A_o et A_n au dessus de la terre "moyenne" mais aussi du dégagement de l'ellipse de Fresnel au voisinage des antennes : on supposera dans ce qui suit que les liaisons ne sont pas masquées près des extrêmités.

Toutefois l'utilisation des abaques de Bullington, pour commode qu'elle soit sur le plan pratique, se prête difficilement à des calculs théoriques. Comme les formules que l'on trouve dans la littérature sont fort complexes, nous avons déterminé empiriquement une expression analytique de l'affaiblissement $A F_1$ qui, bien que n'ayant aucune justification théorique, représente pourtant une très bonne approximation des abaques de Bullington.

La méthode utilisée consiste à placer tout d'abord les extrêmités de la liaison à une hauteur H_c au dessus de la terre moyenne telle que :

(123) $$\boxed{H_c = 2240\, F_r^{-\frac{2}{3}}}$$

(hauteur que FISHBACK [39] désigne sous le nom de "hauteur critique") et à déterminer l'affaiblissement $A F_1'$ correspondant. L'expression de $A F_1'$, que l'on a définie empiriquement à partir des abaques de Bullington, peut s'écrire

(124) $$A F_1' \simeq -4 \left(1 - 1{,}05^{-0{,}0675\, D\, F_r^{\frac{2}{3}}}\right) + 0{,}0675\, D\, F_r^{\frac{2}{3}}$$

Ensuite, pour tenir compte de la véritable hauteur des antennes, il reste à effectuer, pour chacune des extrêmités, une correction de hauteur dont la valeur est donnée par la relation, elle aussi empirique :

$$\underset{dB}{\Delta F_1} \simeq 1{,}9 \frac{h}{H_c} - 0{,}01 \left(\frac{h}{H_c}\right)^2 + 20 \log \left(\frac{h}{H_c}\right) \tag{125}$$

Donc il vient :

$$\underset{dB}{A F_1} \simeq - 4 \left(1 - 1{,}05^{-0{,}0675\ D\ F_r^{\frac{2}{3}}}\right) + 0{,}0675\ D\ F_r^{\frac{2}{3}} + 1{,}9 \frac{h_o + h_n}{H_c} - 0{,}01 \frac{h_o^2 + h_n^2}{H_c^2} + 20 \log \frac{h_o\ h_n}{H_c^2}$$

L'écart entre la valeur calculée par la formule ci-dessus et celle obtenue à l'aide des abaques de Bullington n'excède pas 3 dB, du moins pour les distances inférieures à 2 ou 300 km et les fréquences supérieures à une cinquantaine de M Hz.

c) L'affaiblissement de terre unie, qui traduit en définitive la diffraction due à la courbure de la terre, ne suffit pas toujours à représenter la réalité. En effet, dans certains cas, le trajet radioélectrique est intercepté par des obstacles, tels que crêtes de montagnes, qui ont une allure dite "en lame de couteau" et que l'on appelle "masques à flancs raides". Dans ces conditions l'affaiblissement est la somme de trois termes : $A F_o$, $A F_1$ (déjà cités) et $A F_2$.

L'affaiblissement $A F_2$, appelé "de masque", est sensiblement égal à :

$$\begin{cases} 16 + 20 \log \dfrac{h\ (D_1)}{r\ (D_1)} & \text{si} \quad \dfrac{h\ (D_1)}{r\ (D_1)} \geqslant 1 \\ 8 + 8 \dfrac{h\ (D_1)}{r\ (D_1)} & \text{si } 0{,}5 \leqslant \dfrac{h\ (D_1)}{r\ (D_1)} \leqslant 1 \\ 6 + 12 \dfrac{h\ (D_1)}{r\ (D_1)} & \text{si } -0{,}5 \leqslant \dfrac{h\ (D_1)}{r\ (D_1)} \leqslant 0{,}5 \\ 0 & \text{si} \quad \dfrac{h\ (D_1)}{r\ (D_1)} \leqslant -0{,}5 \end{cases} \tag{127}$$

$r(D_1)$ étant le rayon de l'ellipse de Fresnel[1] et $h(D_1)$ la hauteur (positive ou négative) du sommet de l'obstacle par rapport à la ligne de visée $A_o A_n$ (figure 96) [38] .

Le terme $A F_1$, quant à lui, peut ne pas exister quand les ellipses secondaires sont dégagées (figure 97) ; sinon on le calcule à l'aide de la relation (126), en prenant soin de ne pas tenir compte du masque en lame de couteau pour la détermination de la terre moyenne (qui, rappelons le, intervient directement sur les valeurs réelles de h_o et h_n).

Les expressions (127) sont valables sous réserve que l'on ait $h(D_1) \ll D_1$, $D - D_1$ et qu'en outre le masque considéré soit effectivement à flancs raides. Cette dernière condition peut s'écrire (figure 98) :

$$\frac{s_1}{S_1} , \frac{s_2}{S_2} < C_o \qquad (C_o \simeq 0,9) \tag{128}$$

Or, comme la distance δ est faible en pratique ($\delta \simeq 1,5$ km) il est légitime de remplacer l'expression exacte des rayons r_1 et r_2 des ellipses secondaires au voisinage du masque par :

$$\left| \begin{array}{ll} r_1 \simeq 547 \sqrt{\frac{\delta}{F_r}} \left[1 - \frac{\delta}{2 D_1} \right] & \text{en mètres} \\ r_2 \simeq 547 \sqrt{\frac{\delta}{F_r}} \left[1 - \frac{\delta}{2 (D - D_1)} \right] & \text{en mètres} \end{array} \right. \tag{129}$$

Donc

$$\left| \begin{array}{ll} S_1 \simeq \frac{2 \times 547}{3 \sqrt{F_r}} \delta^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{0,3\ \delta}{D_1} \right] & \text{en m x km} \\ S_2 \simeq \frac{2 \times 547}{3 \sqrt{F_r}} \delta^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{0,3\ \delta}{D - D_1} \right] & \text{en m x km} \end{array} \right. \tag{130}$$

et par suite il vient, toutes approximations faites :

$$\boxed{s_1 + s_2 < \frac{730\ C_o\ \delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{F_r}} \left[1 - \frac{0,15\ \delta\ D}{D_1 (D - D_1)} \right] \quad \text{en m x km}}$$

(1) qui, rappelons, le dépend de la fréquence

encore, compte tenu des ordres de grandeur de C_o et δ :

31)
$$s_1 + s_2 < \frac{1200}{\sqrt{F_r}} \left[1 - \frac{0,22\ D}{D_1\ (D - D_1)} \right]$$

étant exprimé en km, F_r en M Hz et $(s_1 + s_2)$ en m x km.

- DETERMINATION DE LA PROBABILITE D'AFFAIBLISSEMENT DE PROPAGATION ENTRE EMETTEURS - RECEPTEURS SITUES AU SOL AU VOISINAGE DE POINTS HAUTS.

Considérons une coupe de terrain et deux points a_o et a_n situés voisinage de points hauts (voir 3e partie, chapitre II, paragraphe 2-4-) soit h_o et h_n les hauteurs des antennes, h_o et h_n étant de l'ordre de eiques mètres. Cherchons alors, dans ces conditions, quelle est la proba- lité pour que l'affaiblissement de propagation soit inférieur à une valeur nnée (le cas étudié ici est très important dans la pratique : il correspond particulier aux liaisons par câble hertzien).

La probabilité pour que l'ellipse de Fresnel ne coupe pas le l s'obtient aisément en remplaçant, dans la formule (87) par exemple, aque terme $\frac{k}{N_a}\theta$ par $(\frac{k}{N_a}\theta - \frac{r_{o,k}}{\sqrt{2}\,\sigma_a})$, avec :

32)
$$r_{o,k} = \frac{547}{\sqrt{F_r}} \sqrt{\frac{k\ (N_a - k)\ \rho_a}{N_a}}$$

La probabilité cherchée, que l'on notera $E\left[p_a\ (D, F_r, T_s) \right]$, déduit donc de $E\left[p_v\ (D, o, o, T_s) \right]$, formule (87), en remplaçant chaque rme

$$F\left\{\left[\frac{k}{N_a}\theta - \frac{k\,(N_a-k)\,\rho_a^2}{2\sqrt{2}\,R\,\sigma_a} - \mu_o\,(T_s)\right]\frac{1}{\nu_o\,(T_s)}\right\}$$

par

$$F\left\{\left[\frac{k}{N_a}\theta - \frac{k\,(N_a-k)\,\rho_a^2}{2\sqrt{2}\,R\,\sigma_a} - \frac{r_{o,k}}{\sqrt{2}\,\sigma_a} - \mu_o\,(T_s)\right]\frac{1}{\nu_o\,(T_s)}\right\}$$

On obtient donc, en définitive :

(133)

$$E\left[p_a\,(D,\,F_r,\,T_s)\right] = \frac{M}{\left[G(T_a) - G(T_s)\right]^2}\int_{\frac{T_a-T_s}{2}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\prod_{k=1}^{N_a-1}\int_{\frac{N_a^2\,\rho_a^2}{2\sqrt{2}\,R\,\sigma_a}}^{\infty} F\left\{\left[\frac{k}{N_a}\theta - \frac{k(N_a-k)\,\rho_a^2}{2\sqrt{2}\,R\,\sigma_a} - \frac{r_{o,k}}{\sqrt{2}\,\sigma_a} - \mu_o\,(T_s)\right]\frac{1}{\nu_o\,(T_s)}\right\}\cdot\left[G(T_a\sqrt{2}-\theta) - G(T_s\sqrt{2}+\theta)\right]e^{-\frac{\theta^2}{2}}$$

avec M = 4 pour les grandes distances puisque la liaison est supposée dégagée aux extrêmités.

L'affaiblissement d'espace libre existe toujours ; il est donné par la formule (120). Quant à l'affaiblissement de terre unie, qui existe avec la probabilité $1 - E\left[p_a\,(D,\,F_r,\,T_s)\right]$, il est sensiblement égal, en moyenne, à :

(134)

$$\overline{A\,F_1(D,H_o,H_n,F_r)} \simeq -4\,(1-1{,}05^{0{,}0675D}\,F_r^{\frac{2}{3}}) + \left[0{,}065\,D + 1{,}9\,(H_o+H_n)\right]F_r^{\frac{2}{3}} - 0{,}01\,(H_o^2+H_n^2)\,F_r^{\frac{4}{3}} + 20\log H_o\,H_n\,F_r^{\frac{4}{3}}$$

en remplaçant la hauteur critique H_c par sa valeur $2240\,F_r^{-\frac{2}{3}}$ et en posant :

(135)

$$\frac{h_o + m_s\,\sigma_a}{2240} = H_o\ ,\quad \frac{h_n + m_s\,\sigma_a}{2240} = H_n$$

Le terme m_s, altitude moyenne normée des points a_o et a_n, est défini par la formule (72).

Bien entendu l'expression (134) ne donne qu'une valeur moyenne de l'affaiblissement de terre unie pour un ensemble de coupes de terrain et de couples A_o A_n : toutes conditions égales par ailleurs (D, F_r, h_o, h_n, m_s, σ_a), l'affaiblissement effectif relatif à une liaison particulière diffère de $\overline{AF_1}$ (D, H_o, H_n, F_r), et ceci pour plusieurs raisons :

- l'altitude de A_o ou A_n n'est égale à $(h_o + m_s \sigma_a)$ ou $(h_n + m_s \sigma_a)$ qu'en moyenne ;

- le coefficient de réfraction de l'air, qui a été pris égal à $\frac{4}{3}$ dans les formules précédentes, fluctue avec le temps ;

- le profil de la coupe correspondante a une influence non négligeable.

Reste à introduire l'influence éventuelle des masques à flancs raides. En première approximation, on peut adopter le point de vue suivant :

a) ou bien aucun point du terrain n'est plus haut que la droite A_o A_n et alors l'influence d'un masque éventuel est faible (inférieure à 6 dB car $h(D_1)$ est négatif),

b) ou bien il existe un sommet situé au dessus de la droite A_o A_n ; comme a_o et a_n sont eux mêmes au voisinage de points hauts, la hauteur $h(D_1)$ reste faible : en moyenne elle est égale à $\frac{T_a - T_s}{2} \sigma_a$. Sur un terrain moyen tel que celui de Saulieu, σ_a est voisin de 50 m pour l'ensemble des coupes de terrain ; en prenant T_s = 1,5 par exemple et T_a = 2,5, $\frac{T_s - T_a}{2}$ σ_a est voisin de 25 m. Or, pour une fréquence de 400 MHz et une distance de 40 km par exemple, le rayon maximum de l'ellipse de Fresnel est égal à $547 \sqrt{\frac{20}{800}} \simeq 78$ m. Donc $\frac{h\ (D_1)}{r\ (D_1)}$ reste inférieur à 1 pour une plage importante de valeurs D_1, si bien que l'affaiblissement supplémentaire dû au masque est au maximum de quelques dB (d'ailleurs si l'on tient compte de l'effet de masque, il convient d'éliminer ce masque pour déterminer la terre moyenne qui entre dans le calcul de l'affaiblissement de terre unie : il y a donc une compensation partielle puisque la hauteur équivalente des antennes augmente). Comme par ailleurs la probabilité pour que $h\ (D_1)$ soit positif est petite (formule 87), il n'y a pas lieu de tenir compte, dans un calcul de ce genre, de l'affaiblissement dû aux masques à flancs raides, du moins lorsque la fréquence n'est pas trop élevée (quelques centaines de MHz).

Les formules (120), (123), et (124) suffisent donc pour déterminer la valeur moyenne $\overline{A\ F}$ de l'affaiblissement de propagation en fonction de la distance entre émetteur et récepteur, de la hauteur et du choix de l'emplacement des antennes,et de la fréquence. L'erreur commise n'excédera pas quelques dB, ce qui est négligeable en regard des fluctuations de l'affaiblissement $A\ F_1$ de terre unie autour de la valeur $\overline{A\ F_1}$. Tous autres paramètres étant fixés, il serait d'ailleurs interessant de chercher à déterminer la plage de ces fluctuations en fonctions des inhomogénéités du terrain et de l'atmosphère.

CHAPITRE III

INTRODUCTION A L'ETUDE DU MICRORELIEF ET A LA GENERATION DE TERRAINS TRIDIMENSIONNELS

1 - INTRODUCTION

Au cours des chapitres précédents, on a surtout étudié les propriétés liées aux coupes de terrrain, abstraction faite de toute planimétrie (végétation, habitations, etc ...), en considérant une coupe de terrain comme une fonction aléatoire quasi-stationnaire à une variable : la distance le long de la coupe.

Sans vouloir les étudier dans le détail, le présent chapitre se propose d'aborder deux problèmes :

- l'influence du microrelief, c'est-à-dire d'obstacles superficiels tels que végétation et constructions, sur la visibilité ;
- la génération de terrains tridimensionnels.

2 - INFLUENCE DU MICRORELIEF

2-1- PROPRIETES STATISTIQUES DU MICRORELIEF

Les principales caractéristiques du microrelief, du moins si l'on se place du strict point de vue de la visibilité, sont (figure 99):

- la loi de distribution des hauteurs d'obstacles,
- l'opacité des obstacles (dans le cas de la végétation, cette opacité varie avec la saison),
- la loi de distribution des distances q entre obstacles successifs,
- la loi de distribution des longueurs r d'obstacles,
- la corrélation entre le relief et le microrelief.

Il va de soi que les cartes au 1/25 000 ne permettent pas d'étudier les deux premiers points. Faute de données expérimentales sérieuses, on désignera dans ce qui suit par m_e la hauteur moyenne des obstacles d'une région

et par σ_e l'écart-type, en supposant que la loi est gaussienne avec

$$e_{min.} \leqslant e \leqslant e_{max.} \qquad \text{(figure 100)}$$

Quant à l'opacité, on la supposera totale, ce qui est discutable, surtout en ce qui concerne les rideaux d'arbres.

Par ailleurs les cartes 1/25 000 ne représentent généralement pas les obstacles linéaires (rideaux d'arbres) ou ponctuels (bosquets par exemple) et, de toutes façons, elles sont relativement peu précises sur les autres informations intéressantes : dimension et position des bois et villages, position des constructions isolées (châteaux d'eau, fermes, etc ...)

Il n'en demeure pas moins que l'étude du microrelief, et notamment celle de la végétation, présente un intérêt considérable puisque, comme on le verra plus loin, la probabilité d'intervisibilité est fortement influencée par les obstacles superficiels.

Précisons immédiatement qu'aucun travail expérimental relatif aux propriétés statistiques du microrelief n'a encore été effectué sur les régions d'Orléans, Saulieu et Saint-Flour ; par contre un certain nombre de données expérimentales sont d'ores et déjà disponibles : en effet, pour chaque carré de 125 m de côté, on a déterminé s'il y avait ou non un obstacle et, dans l'affirmative, la nature de cet obstacle (habitation, végétation, obstacle isolé ou non, etc ...)

Toutefois il faut noter qu'à l'étranger, en Allemagne notamment, quelques travaux (à caractère en partie confidentiel), axés presqu'exclusivemen sur les obstacles au sens général du terme (végétation, constructions et lignes de crêtes), semblent montrer que la distance q entre obstacles suit une loi de distribution de la forme :

(136) $$f_5(q) = \frac{1}{m_q} \, e^{-\frac{q}{m_q}}$$

Cette loi, dite 1ère loi de Laplace, est caractérisée par le fait que $m_q = \sigma_q$. Or, pour un ensemble de 5 régions de 10 x 10 km^2 chacune, les valeurs expérimentales obtenues pour la moyenne m_q et l'écart-type σ_q de la grandeur q sont les suivantes :

REGION	1	2	3	4	5	MOYENNE
m_q	473 m	713 m	618 m	367 m	373 m	≃ 510 m
σ_q	559 m	701 m	492 m	333 m	348 m	≃ 510 m
$\frac{m_q}{\sigma_q}$	0,85	1,02	1,26	1,1	1,07	≃ 1

TABLEAU 16

La concordance est satisfaisante, surtout si l'on considère les valeurs $\overline{m_q}$ et $\overline{\sigma_q}$.

Malheureusement la loi de distribution des longueurs r d'obstacles n'a pas été étudiée dans le cadre de ces travaux. Nous admettrons (cette hypothèse en vaut bien une autre) qu'elle est aussi représentée par la 1ère loi de Laplace :

(137)
$$f_7(r) = \frac{1}{m_r} e^{-\frac{r}{m_r}}$$

2-2- ETUDE DE L'INTERVISIBILITE EN PRESENCE DE MICRORELEF

2-2-1- Préliminaire

Aucune étude expérimentale de l'intervisibilité en présence d'obstacles superficiels n'a encore été effectuée sur les régions d'Orléans, Saulieu et Saint-Flour ; par contre un certain nombre de résultats ont pu être obtenus sur la région de Vesoul (qui n'a pas été prise en considération dans le présent mémoire) ; qualitativement, ils montrent que :

- quand la distance tend vers zéro, la probabilité de visibilité ne tend vers 1 que si les points A et B sont au dessus des obstacles les plus hauts ; par contre si l'un au moins des points est au sol, la probabilité tend vers le pourcentage Q de parties du terrain non couvertes par les obstacles (on suppose qu'un observateur situé en plein milieu d'une forêt ne voit rien) ;

- quand la distance augmente, la probabilité de visibilité décroît plus vite avec microrelief que sans microrelief ;

- pour les faibles valeurs de probabilité, les courbes forment avec l'axe des distances un angle non nul, alors qu'en l'absence de microrelief les courbes ont tendance à se raccorder tangentiellement à l'axe des distances (plus ou moins lentement selon que la variance σ des altitudes est plus ou moins grande).

Dans les pages qui suivent on s'efforce de justifier théoriquement les résultats qualitatifs résumés ci-dessus.

Il est tout d'abord nécessaire de faire une hypothèse simplificatrice, à savoir que le relief et les obstacles superficiels sont indépendants (ce qui reste à vérifier expérimentalement). Ceci étant, on se place dans le cas où le mouvement résiduel est seul pris en considération, étant entendu que le passage au général se traite de manière identique à celle qui a été décrite dans le chapitre II de la partie précédente, paragraphe 3 (figure 101).

Dans ces conditions, si l'on désigne par $E\left[p'_V(q_o,h_o,h_1)\right]$ l'espérance mathématique de la probabilité d'intervisibilité en présence de microrelief (les hauteurs h_o et h_1 des points A_o et A_1 étant comptées par rapport au sol) et par P_{A_o,A_1} la probabilité que A_o et A_1 ne soient pas situés à l'intérieur d'un obstacle (forêt ou village par exemple), il vient :

$E\left[p'_v\ (q_o,h_o,h_1)\right] = P_{A_o,A_1} \times P_r$ { $A_o\ A_1$ ne coupe pas le terrain, végétation comprise, lorsque les extrêmités A_o et A_1 sont dégagées } ou encore, en désignant par $E\left[p''_v\ (q_o,h_o,h_1)\right]$ le 2e facteur du second nombre :

(138)
$$E\left[p'_v\ (q_o,h_o,h_1)\right] = P_{A_o,A_1} \times E\left[p''_v\ (q_o,h_o,h_1)\right]$$

2-2-2- Détermination de P_{A_o,A_1}

De par sa définition même, il est évident que P_{A_o,A_1} est égal à 1 si A_o et A_1 sont à une hauteur au dessus du sol supérieure à e_{max}, et à Q (pourcentage de parties non couvertes par des obstacles) si l'un des points est au sol (à découvert) et l'autre à une hauteur au dessus du sol supérieure à e_{max}. En outre si les deux points sont au sol, P_{A_o,A_1} est compris entre Q (pour des distances courtes) et Q^2 (pour des distances grandes) : en effet si la distance entre A_o et A_1 est très faible, les deux points sont simultanément dégagés ou couverts par un obstacle, alors que si la distance est importante les deux points peuvent être considérés comme indépendants vis à vis du microrelief. Précisons ce dernier point . On a :

$$P_{A_o,A_1} = Q \times P_r \ \{ A_1 \text{ soit à découvert si } A_o \text{ l'est} \}$$

Désignons alors par $R_6(q)$ et $R_7(r)$ les "fonctions de répartition complémentaires" de q et r :

(139)
$$R_6(q) = \int_q^\infty f_6(t)\,dt = \int_q^\infty \frac{1}{m_q}\, e^{-\frac{q}{m_q}}\, dq$$

$$R_7(r) = \int_r^\infty f_7(t)\,dt = \int_r^\infty \frac{1}{m_r}\, e^{-\frac{r}{m_r}}\, dr$$

En effectuant un raisonnement analoque à celui fait lors de l'étude des probabilités d'état d'occupation, on peut poser :

P_r { A_1 soit découvert si A_o l'est } = $Q_d(D)$, fonction de la distance $D = A_o A_1$, et écrire :

(140)
$$\left| \begin{array}{l} Q_d(D+\Delta D) = Q_d(D) \times P_r \{ \text{ la frange D, D + } \Delta \text{ D ne contienne} \\ \text{aucun obstacle } \} + \left[1 - Q_d(D)\right] \times P_r \{ \text{ il y ait une transition} \\ \text{terrain couvert / terrain dégagé entre D et D + } \Delta \text{ D } \} \end{array} \right.$$

Or d'après un théorème bien connu [40]

P_r { la frange D, D + Δ D ne contienne aucun obstacle } = $1 - \frac{\Delta D}{m_q}$

P_r { il y ait une transition terrain couvert / terrain dégagé entre D et D + Δ D } = $\frac{\Delta D}{m_r}$

puisque, dans le cas de la 1ère loi de Laplace, $\frac{f_6(q)}{R_6(q)} = \frac{1}{m_q}$ et $\frac{f_7(r)}{R_7(r)} = \frac{1}{m_r}$. Donc :

$$Q_d(D + D) = Q_d(D) \left[1 - \frac{\Delta D}{m_q} - \frac{\Delta D}{m_r} \right] + \frac{\Delta D}{m_r}$$

d'où, à la limite :

(141)
$$Q'_d(D) + \left(\frac{1}{m_q} + \frac{1}{m_r}\right) Q_d(D) - \frac{1}{m_r} = 0$$

On a donc :

$$Q_d(D) = \frac{1}{1 + \frac{m_r}{m_q}} + \alpha \; e^{-\frac{D}{m_r}\left(1 + \frac{m_r}{m_q}\right)}$$

avec

$$1 = \frac{1}{1 + \frac{m_r}{m_q}} + \alpha \quad \text{puisque } A_o \text{ est dégagé}$$

et
$$\frac{m_r}{m_q} = \frac{1 - Q}{Q}$$

soit, en définitive :

(142) $$Q_d(D) = Q + (1 - Q)\, e^{-\frac{1}{Q}\frac{D}{m_r}}$$

Par suite, si A_o et A_1 sont au sol, il vient

(143) $$P_{A_o,A_1} \simeq Q^2 \left[1 + \frac{1 - Q}{Q}\, e^{-\frac{1}{Q}\frac{D}{m_r}} \right]$$

Donc P_{A_o,A_1} est bien égal à Q pour D = o et à Q^2 pour D très grand.

On notera que la longueur moyenne m_r des obstacles intervient. Si N_o est le nombre moyen d'obstacles par unité de distance, on a évidemment :

(144) $$N_o\, m_r = 1 - Q$$

d'où

(145) $$P_{A_o,A_1} \simeq Q^2 \left[1 + \frac{1 - Q}{Q}\, e^{-\frac{N_o D}{Q(1-Q)}} \right]$$

N_o est donc une caractéristique importante du terrain puisque le terme P_{A_o,A_1} est d'autant plus faible que N_o est plus grand.

Remarquons que si h_o et / ou h_1 sont compris entre o et e_{max} il suffit, en pratique, d'interpoler linéairement entre la valeur donnée par la formule (144) et 1 (ou Q).

2-2-3- Détermination de $E\left[p''_v\ (q_o, h_o, h_1)\right]$

Considérons à nouveau une coupe de terrain $a_o\ a_1$ décomposée en une suite de q_o paliers dont les altitudes (abstraction faite du microrelief) sont indépendantes. Pour déterminer $E\left[p''_v\ (q_o, h_o, h_1)\right]$ il est possible de procéder d'une manière analogue à celle qui a été utilisée pour le calcul de $E\left[p_v\ (q_o, h_o, h_1)\right]$, c'est-à-dire de calculer successivement $P_r\{A_o \text{ voit } A_1\}$ et $P_r\{A_1 \text{ voit } A_o\}$ en considérant différents cas selon la valeur de la pente de la droite $A_o\ A_1$.

Plaçons nous par exemple dans le "1er cas" (figure 102) et déterminons dans ces conditions l'expression de $P_r\{A_o \text{ voit } A_1\}$. Chacun des paliers peut soit être totalement découvert, soit au contraire comporter une ou plusieurs obstacles. Il est aisé de calculer la probabilité $p''_k(\rho_g)$ pour qu'un palier quelconque, le $k^{\text{ième}}$ par exemple, soit dépourvu de tout microrelief en procédant comme au paragraphe précédent. Deux cas sont alors à prendre en considération :

a) ou bien la hauteur h_o de A_o est suffisamment faible (inférieure à e_{max}) pour que la condition "A_o non recouvert par un obstacle" signifie qu'il n'y a pas de microrelief en a_o : la probabilité p''_k pour que le point situé à la distance $k\rho_g$ de a_o soit découvert est alors égale à $Q + (1 - Q)\, e^{-\frac{k N_o \rho_g}{Q(1-Q)}}$.

b) ou bien la hauteur h_o de A_o est supérieure à e_{max} et dans ces conditions le point a_o peut être ou non à l'intérieur d'un obstacle : p''_k est alors égal à Q.

Bien entendu le raisonnement s'applique aussi à A_1 pour la détermination de $P_r\{A_1 \text{ voit } A_o\}$.

On notera que le terme $(1 - Q)\, e^{-\frac{k N_o \rho_g}{Q(1-Q)}}$ est, compte tenu des ordres de grandeur de Q, N_o, ρ_g, souvent très inférieur à Q, même pour k = 1. Il est donc légitime d'admettre, afin de simplifier la suite des calculs, que p''_k est toujours égal à Q, c'est-à-dire indépendant de k. Toutefois si l'étude de certains cas particuliers l'exige (notamment lorsque le terrain est presqu'entièrement recouvert de végétation alors que les points A_o et A_1 sont au sol) il sera toujours possible de tenir compte du terme correctif en remplaçant dans les formules finales le facteur Q par $Q + (1-Q)\, e^{-\frac{k N_o \rho_g}{Q(1-Q)}}$

Ceci étant, la probabilité pour que le $k^{ième}$ palier soit totalement dépourvu d'obstacle est :

$$(146) \qquad p''_k(\rho_g) = p''_k \lim_{\Delta D \to o} (1-\frac{\Delta D}{m_q})^{\frac{\rho_g}{\Delta D}} \simeq Q\, e^{-\frac{N_o\, \rho_g}{Q}}$$

et la probabilité pour qu'il y ait au moins un obstacle sur le $k^{ième}$ palier est $1 - p''_k(\rho_g)$

Par suite la probabilité pour que le $k^{ième}$ palier, avec ou sans microrelief, ne coupe pas la droite $A_o A_1$ est :

$$Q\, e^{-\frac{N_o\, \rho_g}{Q}} F(\frac{k}{q_o} t + t_{k,q_o}) + (1 - Q\, e^{-\frac{N_o\, \rho_g}{Q}}).F\left[\frac{\sqrt{2}\,\sigma_g(\frac{k+\frac{1}{2}}{q_o} t + t_{k+\frac{1}{2},q_o}) - m_e}{\sqrt{2\,\sigma_g^2 + \sigma_e^2}}\right]$$

en prenant comme hypothèses (somme toute réalistes)

- que les obstacles ont une hauteur constante pour un palier donné,
- que le 1er obstacle d'un palier se situe en moyenne au milieu de ce palier.

Par conséquent $E\left[p''_v\ (q_o,h_o,h_1)\right]$ se calcule de la même manière que $E\left[p_v\ (q_o,h_o,h_1)\right]$ en substituant partout chacun des termes de la forme $F(\frac{k}{q_o} t + t_{k,q_o})$ par l'expression (147).

$E\left[p''_v\ (q_o,h_o,h_1)\right]$ est donc plus petit que $E\left[p_v\ (q_o,h_o,h_1)\right]$, d'autant plus que :

- m_e est grand devant σ_g (hauteur du microrelief grand devant les fluctuations du relief seul),
- N_o est grand (nombre élevé d'obstacles par unité de distance),
- Q est petit (faible pourcentage de terrain découvert).

Les expressions (145) et (147) montrent notamment que, toutes choses égales par ailleurs, la probabilité de visibilité $E\left[p'_v\ (q_o, h_o, h_1)\right]$ dépend fortement de N_o, c'est-à-dire du découpage du microrelief.

2-2-4- Cas particulier $h_o = h_1 = o$

Si A_o et A_1 sont au sol la relation (64), établie en l'absence de microrelief, devient :

$$E\left[p'_v\ (q_o,o,o)\right] \approx Q^2 \left[1 + \frac{1-Q}{Q}\, e^{-\frac{N_o\, q_o\, \rho_g}{Q\,(1-Q)}}\right] \cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{\theta^2}{2}} \prod_{k=o}^{q_o - 1} \left[Q\, e^{-\frac{N_o\, \rho_g}{Q}}\, F\left(\frac{k}{q_o}\,\theta\right) + \left(1 - Q\, e^{-\frac{N_o\, \rho_g}{Q}}\right) \cdot F\left(\frac{\sqrt{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sigma_g\,\theta - q_o\, m_e}{q_o \sqrt{2\,\sigma_g^2 + \sigma_e^2}}\right) \right] d\theta \qquad (148)$$

en prenant soin, pour $k = o$, de remplacer $F\left(\frac{k}{q_o}\,\theta\right)$ par 1 puisque, pour $\theta \geqslant o$, le 1er palier ($k = o$) ne peut couper $A_o\, A_1$ lorsque seul le relief est pris en considération.

3 - GENERATION DE TERRAINS TRIDIMENSIONNELS

La génération de terrains tridimensionnels, c'est-à-dire z = z (x,y), soulève un certain nombre de problèmes relativement complexes que nous ne ferons qu'aborder ici sans leur apporter de solution :

- lissage d'une fonction de deux variables de manière à extraire la tendance générale du terrain ;

- analyse statistique du relief résiduel, c'est-à-dire : loi de répartition et matrice de corrélation de la v.a (x,y), ce qui a priori ne présente pas d'autre difficulté que de disposer d'un grand nombre d'heures d'ordinateur ;

- génération d'un phénomène aléatoire multidimensionnel ayant les mêmes propriétés statistiques que le terrain résiduel.

En ce qui concerne le lissage d'une fonction à deux variables, plusieurs méthodes sont a priori possibles.

a) Une 1ère méthode, préconisée par la Société Aéro [41] est basée sur la théorie des graphes ; elle consiste à utiliser un "chevelu", c'est-à-dire l'ensemble des lignes de plus grande pente, de manière à mettre en évidence, afin de les éliminer, les bosses de la fonction. Cette méthode paraît très lourde à manipuler.

b) Une autre méthode consisterait à effectuer un filtrage numérique bidimensionnel à l'aide, par exemple, d'une "Transformée de Fourier Rapide" à deux variables ou de polynomes d'interpolation optimaux à deux variables.

c) Une dernière méthode, et c'est peut-être la mieux adaptée au problème, consisterait (figure 103) :

- à superposer au terrain un quadrillage lâche ;

- à rechercher, pour moyennage autour de chaque sommet du quadrillage lâche, l'altitude correspondante de la surface lissante ;

- à déterminer la meilleure surface d'interpolation de telle sorte que si l'on procède de la même manière en un point intermédiaire M on retrouve effectivement un point de la surface lissante.

Par ailleurs la méthode de génération de phénomènes aléatoires multidimensionnels à l'aide d'un calculateur numérique doit permettre d'obtenir :

a) soit des ensembles de coupes radiales : ce problème n'apparaît pas, de prime abord, aisé à résoudre, essentiellement parce que les distances entre points homologues ne sont pas constantes (figure 104) ;

b) soit des ensembles de coupes parallèles intercorrélées (figure 105) : le procédé est analogue à celui décrit précédemment pour la génération de coupes de terrain mais chaque coefficient c_{ij} de la matrice de covariance serait remplacé par une matrice ;

c) soit encore, méthode sans doute difficile à élaborer, un quadrillage composé de points générés au fur et à mesure (figure 106).

La génération par ordinateur de phénomènes multidimensionnels présente un très grand intérêt et il est certain qu'il y a là un axe de recherche très intéressant. Il faut toutefois noter qu'une méthode, si séduisante soit-elle sur le plan théorique, ne pourra être retenue que si, en définitive, le temps de traitement sur machine reste dans des limites raisonnables.

CONCLUSION

Les travaux effectués dans le cadre de cette étude ont permis :

- d'analyser les propriétés statistiques du relief et d'en déduire un modèle mathématique traduisant ces propriétés en termes de fonctions aléatoires ;

- de définir et mettre au point une méthode de génération de coupes de terrain statistiquement identiques à des coupes de terrain réelles ;

- d'étudier le problème de l'intervisibilité de deux points situés au sol ou au voisinage du sol, notamment de manière théorique (en déterminant la probabilité d'intersection d'une droite avec une fonction aléatoires) ;

- d'appliquer le même procédé à la détermination des échos de sol radar et au calcul de l'affaiblissement de propagation des ondes radioélectriques le sol ;

- d'étudier l'influence du microrelief sur la visibilité.

Cependant, ainsi qu'on l'a vu, l'étude a essentiellement porté sur l'aspect "coupes de terrain", alors que le terrain est un processus aléatoire deux variables. Si la voie choisie se justifie, ainsi qu'on l'a montré ans la première partie, il n'en demeure pas moins interessant d'essayer de ettre au point des outils mathématiques qui permettraient d'aborder le problème d'une autre façon, par le biais des fonctions aléatoires à deux variables (en gardant toujours présentes à l'esprit les contraintes qu'impose le traitement sur ordinateur).

Notons enfin, pour conclure, que les méthodes que nous avons mises u point dans le cadre de cette étude peuvent avoir de nombreux débouchés : éflection sur le sol d'ondes radioélectriques, études de diagrammes d'antennes, énération de trajectoires d'avions volant en "suivi de sol" et, moyennant ertaines adaptations, réalisation de modèles de mer et étude des phénomènes ui se rattachent à l'état de surface de la mer (on remarquera qu'alors ne nouvelle variable intervient : le temps).

ANNEXES

ANNEXE I

1 - INTRODUCTION

La présente annexe a pour objet le calcul de l'espérance mathématique $E\left[p_v(q_o, h_o, h_1)\right]$ de la probabilité d'intervisibilité dans le cas où la tendance des coupes de terrain peut être assimilée à un segment de droite (3e partie, Chapitre II, paragraphe 2).

Pour une coupe de terrain $a_o\ a_1$ particulière, la probabilité d'intervisibilité entre les deux points A_o et A_1 est donnée, on l'a vu, par la formule :

$$P_v(q_o, h_o, h_1) = \frac{P_r\{A_o \text{ voit } A_1\} + P_r\{A_1 \text{ voit } A_o\}}{2}$$

La méthode consiste à déterminer successivement $P_r\{A_o \text{ voit } A_1\}$, $P_r\{A_1 \text{ voit } A_o\}$ et $P_v(q_o, h_o, h_1)$ pour une coupe $a_o\ a_1$ particulière puis l'espérance mathématique $E\left[P_v(q_o, h_o, h_1)\right]$ en tenant compte du fait que les altitudes z_o et z_1 de a_o et a_1 sont des variables aléatoires.

2 - CALCUL DE $P_r\{A_0$ VOIT $A_1\}$ POUR UNE COUPE PARTICULIERE

Il y a deux cas selon que la pente de $A_o\ A_1$ est positive ou négative par rapport à $b_o\ b_1$.

1er cas : La pente de $A_o\ A_1$ par rapport à $b_o\ b_1$ est positive ou nulle, c'est-à-dire que $g_1 - g_o \geq h_o - h_1$. On a alors :

$$(149) \qquad P_r\{A_o \text{ voit } A_1\} \approx P_r\{z_{o,k} \leq z_o + h_o + \frac{k}{q_o}(z_1 - z_o + h_1 - h_o)\}$$

k variant de 1 à $q_o - 1$

en remarquant que les points A_o et A_1 ne sont jamais au dessous du terrain et que, si $z_{o,k}$ est inférieur à $Z_{o,k} = z_o + h_o + \frac{k}{q_o}(z_1 - z_o + h_1 - h_o)$, tous les points d'abscisse comprise entre $k\,\rho_g$ et $(k+1)\,\rho_g - \varepsilon$ sont nécessairement en dessous de la droite $A_o\,A_1$ (figure 102). Or

$$z_{o,k} = f_{o,k} + g_{o,k} = \left[f_o + \frac{k}{q_o}(f_1 - f_o)\right] + g_{o,k}$$

Par suite la formule (149) s'écrit :

$$(150) \qquad P_r\{A_o \text{ voit } A_1\} \simeq P_r\{g_{o,k} \leqslant g_o + h_o + \frac{k}{q_o}(g_1 - g_o + h_1 - h_o)\}$$

k variant de 1 à $q_o - 1$

Posons alors :

$$(151) \qquad \boxed{\frac{g_1 - g_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g} = t}$$

$$(152) \qquad \boxed{\frac{h_o + \frac{k}{q_o}(h_1 - h_o)}{\sqrt{2}\ \sigma_g} = t_{k,q_o}}$$

Il vient

$$(152) \qquad P_r\{A_o \text{ voit } A_1\} \simeq P_r\left\{\frac{g_{o,k} - g_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g} \leqslant \frac{k}{q_o}\,t + t_{k,q_o}\right\}$$

k variant de 1 à $q_o - 1$

Or $g_{o,k} - g_o$ est une v.a gaussienne de moyenne nulle et d'écart type $\sqrt{2}\ \sigma_g$, puisque $g_{o,k}$ et g_o sont deux v.a gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et d'écart type σ_g. Par suite $\frac{g_{o,k} - g_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}$ est une v.a gaussienne réduite ; dans ces conditions si l'on néglige la corrélation (d'ailleurs égale à 0,5) entre les v.a $\frac{g_{o,k} - g_o}{\sqrt{2}\ g}$ pour les différentes valeurs de k, y compris q_o, on obtient :

53) $$P_r\left\{\frac{g_{o,k} - g_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g} \leqslant \frac{k}{q_o} t + t_{k,q_o}\right\} = F\left(\frac{k}{q_o} t + t_{k,q_o}\right)$$

u F désigne la fonction de répartition correspondant à la loi normale
duite) et finalement il vient :

54) $$P_r\{A_o \text{ voit } A_1\} \simeq \prod_{k=1}^{q_o-1} F\left(\frac{k}{q_o} t + t_{k,q_o}\right)$$

La formule (154) est valable pour $g_1 - g_o \geqslant h_o - h_1$, c'est-à-dire
$\geqslant t_{q_o}$ avec :

54) $$\boxed{t_{q_o} = t_{o,q_o} - t_{q_o,q_o} = \frac{h_o - h_1}{\sqrt{2}\ \sigma_g}}$$

notant que, de toute façon, on a nécessairement :

55) $$\boxed{|t| \leqslant \frac{T_g \cdot T'_g}{\sqrt{2}}}$$

ec $\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}} \simeq 3{,}5$ en pratique.

Remarque importante : Il est certain, puisque les altitudes de la coupe
siduelle sont comprises entre $-T'_g\ \sigma_g$ et $T_g\ \sigma_g$ et que la pente du terrain
une valeur limite $t_g\ \alpha_{max}$, que $P_r\{A_o \text{ voit } A_1\}$ est égal à 1 si la droite
A_1, ou son prolongement, passe au dessus du point M (figure 103) dans le
s défavorable où a_o a pour altitude $-T'_g\ \sigma_g$. Cette condition s'exprime par :

56) $$t \geqslant t_{q_o} + \frac{q_o\ \rho_g\ tg\alpha_{max}}{\sqrt{2}\ \sigma_g} - t_{o,q_o}\ \frac{q_o\ \rho_g\ tg\alpha_{max}}{(T_g + T'_g)\ \sigma_g}$$

tons qu'elle est toujours réalisée si h_o et h_1 sont supérieurs à
$_g + T'_g)\ \sigma_g$.

2e cas : La pente de $A_o\ A_1$ par rapport à $b_o\ b_1$ est négative mais telle que $A_o\ A_1$ ne coupe pas le premier palier, c'est-à-dire celui qui correspond à des distances comprises entre 0 et $\rho_g - \varepsilon$ (figure 104). Cette condition s'exprime par :

$$t < t_{q_o}$$

$$\text{et } g_o \leqslant g_o + h_o + \frac{1}{q_o}\ (g_1 - g_o + h_1 - h_o)$$

soit

$$t_{q_o} - q_o\ t_{o,q_o} \leqslant t < t_{q_o}$$

Dans ce cas on obtient :

$$P_r\{A_o \text{ voit } A_1\} \simeq P_r\{g_{o,k} \leqslant g_o + h_o + \frac{k+1}{q_o}\ (g_1 - g_o + h_1 - h_o)\} \tag{157}$$

k variant de 1 à $q_o - 1$

puisque, si la condition sur $g_{o,k}$ est réalisée, tous les points d'abscisse comprise $k\ \rho_g$ et $(k+1)\ \rho_g - \varepsilon$ sont nécessairement au dessous de la droite $A_o\ A_1$.

Dans les mêmes conditions que précédemment, la formule (157) devient :

$$P_r\{A_o \text{ voit } A_1\} \simeq \prod_{k=1}^{q_o - 1} F\ (\frac{k+1}{q_o}\ t + t_{k+1,q_o})$$

soit encore

$$P_r\{A_o \text{ voit } A_1\} \simeq \prod_{k=2}^{q_o} F\ (\frac{k}{q_o}\ t + t_{k,q_o}) \tag{158}$$

Toutefois la même remarque que précédemment s'impose et la probabilité que A_o voie A_1 est égale à 1 si :

$$t \leqslant t_{q_o} - \frac{q_o\ \rho_g\ tg\alpha_{max}}{\sqrt{2}\ \sigma_g} + t_{q_o,q_o}\ \frac{q_o\ \rho_g\ tg\alpha_{max}}{(T_g + T'_g)\ \sigma_g} \tag{159}$$

3e cas : La droite $A_o\ A_1$ coupe le premier palier. Cette condition s'exprime par :

$$t < t_{q_o} - q_o\ t_{o,q_o}$$

et dans ce cas la probabilité pour que A_o voie A_1 est nulle. Notons que cela ne peut se produire si la condition (159) est réalisée.

3 - CALCUL DE $P_r\{A_1$ voit $A_o\}$ POUR UNE COUPE PARTICULIERE

Ce calcul est très semblable au précédent et s'en déduit par symétrie.

1e cas : La pente de $A_1\ A_o$ par rapport à $b_1\ b_o$ est positive. Cette condition s'écrit $t < t_{q_o}$ et il vient :

$$(160) \qquad P_r\{A_1 \text{ voit } A_o\} = \prod_{k=1}^{q_o-1} F\left(-\frac{k}{q_o}\ t + t_{q_o} - k,\ q_o\right)$$

en notant que $P_r\{A_1$ voit $A_o\} = 1$ si la relation (159) est vérifiée.

2e cas : La pente de $A_1\ A_o$ par rapport à $b_1\ b_o$ est négative ou nulle, mais telle que $A_1\ A_o$ ne coupe pas le premier palier à partir de A_1. Ce cas s'exprime par :

$$t_{q_o} \leqslant t \leqslant t_{q_o} + q_o\ t_{q_o,q_o}$$

et il vient alors

$$(161) \qquad P_r\{A_1 \text{ voit } A_o\} = \prod_{k=2}^{q_o} F\left(-\frac{k}{q_o}\ t + t_{q_o} - k, q_o\right)$$

Toutefois $P_r\{A_1$ voit $A_o\} = 1$ si la condition (156) est vérifiée.

3e cas : La droite A_1 voit A_o coupe le premier palier à partir de A_1 (ce qui suppose que l'inégalité (156) ne soit pas réalisée). Alors: $P_r\{A_1$ voit $A_o\} = 1$.

4 - CALCUL DE $p_v (q_o, h_o, h_1)$ POUR UNE COUPE PARTICULIERE

Soit :

(162)

$$u = \frac{\rho_g \ tg\alpha_{max}}{\sqrt{2} \ \sigma_g}$$

$$u_o = u \left(1 - \frac{\sqrt{2} \ t_{q_o, q_o}}{T_g + T'_g}\right) = u \left[1 - \frac{h_1}{(T_g + T'_g) \ \sigma_g}\right]$$

$$u'_o = u \left(1 - \frac{\sqrt{2} \ t_{o, q_o}}{T_g + T'_g}\right) = u \left[1 - \frac{h_o}{(T_g + T'_g) \ \sigma_g}\right]$$

Comme en pratique $\frac{tg\alpha_{max}}{\sqrt{2} \ \sigma_g} \simeq 5$ et que, comme on le verra plus loin, $\rho_g \simeq 400$ m, u est voisin de 2 ; par ailleurs u_o et /ou u'_o doivent être pris égaux à zéro quand le facteur multiplicatif de u est négatif ou nul.

Posons :

(163)

$$\theta = t - t_{q_o} = t - \frac{h_o - h_1}{\sqrt{2} \ \sigma_g}$$

On obtient :

$$\frac{k}{q_o} t + t_{k, q_o} = t_{o, q_o} + \frac{k}{q_o} \theta = \frac{h_o}{\sqrt{2} \ \sigma_g} + \frac{k}{q_o} \theta$$

$$-\frac{k}{q_o} t + t_{q_o - k, q_o} = t_{q_o, q_o} - \frac{k}{q_o} \theta = \frac{h_1}{\sqrt{2} \ \sigma_g} - \frac{k}{q_o} \theta$$

Si l'on pose alors :

$$\prod_{k=1}^{q_o-1} F\left(\frac{k}{q_o} t + t_{k,q_o}\right) = \prod_{k=1}^{q_o-1} F\left(t_{o,q_o} + \frac{k}{q_o}\theta\right) = K_{q_o}(t_{o,q_o},\theta) = K_{q_o}\left(\frac{h_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g},\theta\right)$$

$$\prod_{k=1}^{q_o-1} F\left(-\frac{k}{q_o} t + t_{q_o-k,q_o}\right) = \prod_{k=1}^{q_o-1} F\left(t_{q_o,q_o} - \frac{k}{q_o}\theta\right) = K'_{q_o}(t_{q_o,q_o},-\theta) = K'_{q_o}\left(\frac{h_1}{\sqrt{2}\,\sigma_g},-\theta\right)$$

$$\frac{F(t_{o,q_o} + \theta)}{F\left(t_{o,q_o} + \frac{\theta}{q_o}\right)} = \lambda_{q_o}(t_{o,q_o},\theta) = \lambda_{q_o}\left(\frac{h_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g},\theta\right)$$

$$\frac{F(t_{q_o,q_o} - \theta)}{F\left(t_{q_o,q_o} - \frac{\theta}{q_o}\right)} = \lambda'_{q_o}(t_{q_o,q'_o} - \theta) = \lambda'_{q_o}\left(\frac{h_1}{\sqrt{2}\,\sigma_g},-\theta\right)$$

il vient

$$\prod_{k=2}^{q_o} F\left(\frac{k}{q_o} t + t_{k,q_o}\right) = K_{q_o}(t_{o,q_o},\theta).\lambda_{q_o}(t_{o,q_o},\theta)$$

$$\prod_{k=2}^{q_o} F\left(-\frac{k}{q_o} t + t_{q_o-k,q_o}\right) = K'_{q_o}(t_{q_o,q_o},-\theta).\lambda'_{q_o}(t_{q_o,q_o},-\theta)$$

(en remarquant que λ_{q_o} et λ'_{q_o} sont inférieurs à 1 dans les domaines de variation de θ).

Soit alors :

(165)

$$v_o = \inf\left(u_o, t_{o,q_o}\right) = \inf\left(u_o, \frac{h_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g}\right)$$

$$v'_o = \inf\left(u'_o, t_{q_o,q_o}\right) = \inf\left(u'_o, \frac{h_1}{\sqrt{2}\,\sigma_g}\right)$$

En résumé de ce qui précède, on peut écrire que :

a) si $\theta \leqslant -q_o\, u_o$ ou $\theta \geqslant q_o\, u'_o$: $p_v\,(q_o, h_o, h_1) = 1$

b) si $o \leqslant \theta \leqslant q_o\, v'_o$: $p_v\,(q_o, h_o, h_1) \simeq \frac{1}{2}\left[K_{q_o}(t_o, q_o, \theta) + K'_{q_o}(t_{q_o}, q'_o, -\right.$

$\left. \lambda'_{q_o}(t_{q_o}, q_o, -\theta)\right]$

c) si $-q_o\, v_o \leqslant \theta < o$: $p_v\,(q_o, h_o, h_1) \simeq \frac{1}{2}\left[K_{q_o}(t_o, q_o, \theta).\lambda_{q_o}(t_o, q_o, \theta) +\right.$

$\left. K'_{q_o}(t_{q_o}, q_o, -\theta)\right]$

d) si $-q_o\, u_o < \theta < -q_o\, v_o$: $p_v\,(q_o, h_o, h_1) \simeq \frac{1}{2}\, K'_{q_o}(t_{q_o}, q_o, -\theta)$

e) si $q_o\, v'_o < \theta < q_o\, u'_o$: $p_v\,(q_o, h_o, h_1) \simeq \frac{1}{2}\, K_{q_o}(t_o, q_o, \theta)$

étant bien entendu que t est nécessairement compris entre $-\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}$ et $\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}$ et par conséquent que :

(166)

$$-\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}} - t_{q_o} \leqslant t \leqslant \frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}} - t_{q_o}$$

5 - CALCUL DE E $\left[p_v (q_o, h_o, h_1) \right]$

Les expressions précédentes permettent de déterminer, pour une coupe de terrain $a_o\, a_1$ particulière, la probabilité d'intervisibilité de A_o et A_1. En réalité le résultat cherché est la probabilité moyenne d'intervisibilité pour l'ensemble des valeurs de t (comprises entre $\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}$ et $\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}$) - Le segment représentant le mouvement lent restant le même - c'est-à-dire l'espérance mathématique $E\left[p_v (q_o, h_o, h_1)\right]$. Il est donc nécessaire de procéder à une intégration sur t, t étant une v.a gaussienne réduite tronquée dont la fonction de répartition peut, avec une très bonne approximation compte tenu des valeurs de T_g et T'_g, être mise sous la forme - déduite de la formule (29), avec $T_x = T'_x = \frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}$

(167)

$$p(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi G\left(\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}\right)} \; e^{-\frac{t^2}{2}} \; \Lambda\left(\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}, t\right)$$

en désignant par Λ (T,t) la fonction échelon dans l'intervalle (-T,T) et par G (T) la fonction de Galton (le terme 2 G $\left(\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}\right)$ est voisin de 1 puisque, en pratique, $\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}} \simeq 3{,}5$).

L'expression de E $\left[p_v (q_o, h_o, h_1)\right]$ s'écrit en définitive :

$$E\left[p_v\ (q_o, n_o, h_1)\right] = 1 - \int_{-q_o}^{u_o} \left[1 - \frac{1}{2} K'_{q_o}\ (t_{q_o}, q_o, -\theta)\right]\ p\ (\theta + t_{q_o})\ d\theta$$

$$- \int_{o}^{q_o\ u'_o} \left[1 - \frac{1}{2} K_{q_o}\ (t_o, q_o, \theta)\right]\ p\ (\theta + t_{q_o})\ d\theta + \int_{-q_o}^{v_o} \frac{1}{2} K_{q_o}\ (t_o, q_o, \theta) \cdot \lambda_{q_o}\ (t_o$$

$$p\ (\theta +$$

$$+ \int_{o}^{q_o\ v'_o} \frac{1}{2} K'_{q_o}\ (t_{q_o}, q_o, -\theta) \cdot \lambda_{q_o}\ (t_{q_o}, q_o, -\theta) . p\ (\theta + t_{q_o})\ d\theta$$

(168)

soit encore, en introduisant explicitement la distance et les hauteurs h_o et h

$$E\left[p_v\ (D, h_o, h_1)\right] = 1 - \int_{-q_o}^{u_o} \left[1 - \frac{1}{2} K'_{q_o}\ \left(\frac{h_1}{\sqrt{2}\ \sigma_g}, -\theta\right)\right]\ p\ \left(\theta + \frac{h_o - h_1}{\sqrt{2}\ \sigma_g}\right)$$

$$- \int_{o}^{q_o\ u'_o} \left[1 - \frac{1}{2} K_{q_o}\ \left(\frac{h_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}, \theta\right)\right]\ p\ \left(\theta + \frac{h_o - h_1}{\sqrt{2}\ \sigma_g}\right)\ d\theta$$

$$+ \int_{-q_o}^{v_o} \frac{1}{2} K_{q_o}\ \left(\frac{h_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}, \theta\right) \cdot \lambda_{q_o}\ \left(\frac{h_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}, \theta\right) . p\ \left(\theta + \frac{h_o - h_1}{\sqrt{2}\ \sigma_g}\right)\ d\theta$$

$$+ \int_{o}^{q_o\ v'_o} \frac{1}{2} K'_{q_o}\ \left(\frac{h_1}{\sqrt{2}\ \sigma_g}, -\theta\right) \cdot \lambda'_{q_o}\ \left(\frac{h_1}{\sqrt{2}\ \sigma_g}, -\theta\right) . p\ \left(\theta + \frac{h_o - h_1}{\sqrt{2}\ \sigma_g}\right)\ d\theta$$

(169)

ANNEXE : I

1 - INTRODUCTION

La présente annexe a pour objet la détermination des lois de distribution des v.a $\frac{g_{o,k} - g_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}$ et $\frac{g_1 - g_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}$ lorsque les points a_o et a_1 sont choisis au voisinage de points hauts du terrain, en entendant par points hauts des points dont l'altitude par rapport au terrain moyen est supérieur ou égale à $T_s\ \sigma_g$.

2 - LOI DE DISTRIBUTION DE $\frac{g_{o,k} - g_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}$

Si l'on désigne par $U(w - w_o)$ la fonction de Heaviside relative à la variable w, les lois de distibution des v.a $\frac{g_{o,k}}{\sqrt{2}\ \sigma_g}$ et $\frac{g_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}$ sont respectivement :

$$(170) \qquad \frac{1}{G(T_g) + G(T'_g)}\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ e^{-w^2}\left[U\left(w + \frac{T'_g}{\sqrt{2}}\right) - U\left(w - \frac{T_g}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$(171) \qquad \frac{1}{G(T_g) - G(T_s)}\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ e^{-w^2}\left[U\left(w - \frac{T_s}{\sqrt{2}}\right) - U\left(w - \frac{T_g}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Quant à la v.a $t = \frac{g_{o,k} - g_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}$, elle est comprise entre $-\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}$ et $\frac{T_g - T_s}{\sqrt{2}}$ et sa loi de distribution est donnée par :

(172)

$$p_o(t) \frac{U(t + \frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}) - U(t - \frac{T_g - T_s}{\sqrt{2}})}{\left[G(T_g) - G(T_s)\right] \cdot \left[G(T_g) + G(T'_g)\right]} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} e^{-u^2} e^{-(u-\tau)^2}$$

$$\left[U(u + \frac{T'_g}{\sqrt{2}}) - U(u - \frac{T_g}{\sqrt{2}})\right] \left[U(u - t - \frac{T_s}{\sqrt{2}}) - U(u - t - \frac{T_g}{\sqrt{2}})\right] du$$

Posons :

(173)

$$\boxed{A_o \left[G(T_g) - G(T_s)\right] \cdot \left[G(T_g) + G(T'_g)\right]}$$

Il vient :

$$p_o(t) = \frac{U(\tau) - U(t - \frac{T_g - T_s}{\sqrt{2}})}{A_o} \int_{t + \frac{T_s}{\sqrt{2}}}^{\frac{T_g}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\pi} e^{-u^2} e^{-(u-t)^2} du$$

(174)

$$+ \frac{U(t + \frac{T'_g + T_s}{\sqrt{2}}) - U(t)}{A_o} \int_{t - \frac{T_s}{\sqrt{2}}}^{t + \frac{T_g}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\pi} e^{-u^2} e^{-(u-t)^2} du$$

$$+ \frac{U(t + \frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}) - U(t + \frac{T'_g + T_s}{\sqrt{2}})}{A_o} \int_{t - \frac{T'_g}{\sqrt{2}}}^{t + \frac{T_g}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\pi} e^{-u^2} e^{-(u-$$

Or on voit aisément, en faisant le changement de variable

$v = u - \frac{t}{2}$, que $\int_a^b \frac{1}{\pi} e^{-u^2} e^{-(u,t)^2} du = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2}\,\pi} \left[G(2b - t) - G(2a - t) \right]$.

Par suite il vient :

$$p_o(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{A_o \sqrt{2\pi}} \left[U(t) - U(t - \frac{T_g - T_s}{2}) \right] \left[G(T_g \sqrt{2} - t) - G(T_s \sqrt{2} + t) \right]$$

$$+ \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{A_o \sqrt{2\pi}} \left[U(t + \frac{T'_g + T_s}{\sqrt{2}}) - U(t) \right] \left[G(T_g \sqrt{2} + t) - G(T_s \sqrt{2} + t) \right]$$

$$+ \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{A_o \sqrt{2\pi}} \left[U(t + \frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}) - U(t + \frac{T'_g + T_s}{\sqrt{2}}) \right] \left[G(T_g \sqrt{2} + t) + G(T'_g \sqrt{2} + t) \right]$$

soit encore

$$p_o(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{A_o \sqrt{2\pi}} \left[U(t + \frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}) - U(t - \frac{T_g - T_s}{\sqrt{2}}) \right] G(T_g \sqrt{2} - |t|)$$

$$- \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{A_o \sqrt{2\pi}} \left[U(t + \frac{T'_g + T_s}{\sqrt{2}}) - U(t - \frac{T_g - T_s}{\sqrt{2}}) \right] G(T_s \sqrt{2} + t)$$

$$+ \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{A_o \sqrt{2}} \left[U(t + \frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}) - U(t + \frac{T'_g + T_s}{\sqrt{2}}) \right] G(T'_g \sqrt{2} + t)$$

Si l'on désigne par $\mu_o(T_s)$ la valeur moyenne de la v.a t et par $\nu_o(T_s)$ son écart-type, on peut écrire :

$$\mu_o(T_s) = \frac{1}{A_o\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}}^{\frac{T_g - T_s}{\sqrt{2}}} G(T_g\sqrt{2} - |t|)\, t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$$- \frac{1}{A_o\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T'_g + T_s}{\sqrt{2}}}^{\frac{T_g - T_s}{\sqrt{2}}} G(T_s\sqrt{2} + t)\, t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \qquad (176)$$

$$+ \frac{1}{A_o\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}}^{-\frac{T'_g + T_s}{\sqrt{2}}} G(T'_g\sqrt{2} + t)\, t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

et de la même manière, en remplaçant le facteur t par t^2 :

$$\nu_o^2(T_s) = \mu_o^2(T_s) + \frac{1}{A_o\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}}^{\frac{T_g - T_s}{\sqrt{2}}} G(T_g\sqrt{2} - |t|)\, t^2\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt - e$$

Les valeurs de $\mu_o(T_s)$ et de $\nu_o(T_s)$, obtenues pour différentes valeurs de T_s (en prenant $T_g = T'_g = 2,5$), sont consignées dans le tableau suivant :

	-2,5	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	2,5
)	0	-0,026	-0,19	-0,0545	-0,78	-1,04	-1,31	-1,56	-1,75
)	0, 96	0,94	0,865	0,78	0,75	0,72	0,70	0,68	0,675

TABLEAU 16

3 - LOI DE DISTRIBUTION de $\frac{g_1 - g_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}$

La démonstration est identique à la précédente en remplaçant partout T'_g par $-T_s$. Dans ces conditions, si l'on pose :

(178) $$\boxed{A_1 = \left[G(T_g) - G(T_s)\right]^2}$$

la densité de probabilité $p_1(t)$ de la v.a $t = \frac{g_1 - g_o}{\sqrt{2}\ \sigma_g}$ est donnée par :

9) $$\boxed{p_1(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{A_1\sqrt{2\pi}} \left[G(T_g\sqrt{2} - |t|) - G(T_s\sqrt{2} + |t|)\right] \Lambda\left(\frac{T_g - T_s}{\sqrt{2}}, t\right)}$$

Remarquons au passage que, dans la formule (60), on a $T_s = -T'_g$ et que l'on y a remplacé le terme $\frac{G(T_g\sqrt{2} - |t|) - G(T_g\sqrt{2} + |t|)}{\left[G(T_g) + G(T'_g)\right]^2}$ par un coefficient de normalisation indépendant de t et égal à $\frac{1}{2G\left(\frac{T_g + T_g}{\sqrt{2}}\right)}$

c'est-à-dire très voisin de 1. Cette approximation se justifie car T_g et T'_g sont de l'ordre de 2,5 : l'influence de la variation de ce terme ne commenc donc à se faire sentir que pour les valeurs importantes de $|t|$, disons supérieures à 1,5, alors que $e^{-\frac{t^2}{2}}$ est déjà faible.

La moyenne $\mu_1(T_s)$ de la v.a t est nulle (puisque $p_1(t)$ est symétrique en t). Quant à l'écart-type $\nu_1(T_s)$, il est donné par le tableau suivant

T_s	-2,5	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$\nu_1(T_s)$	[illegible]	[illegible]	0,765	0,56	0,46	0,36	0,26	0,14	0

TABLEAU 17

4 - REMARQUE

Si l'on désigne par m_s la valeur moyenne des altitudes g_o et g_1 de a_o et a_1 normées par rapport à l'écart-type σ_g, on obtient :

$$m_s = \frac{1}{G(T'_g) - G(T_s)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{T_s^2}{2}} - e^{-\frac{T_g^2}{2}} \right]$$

m_s vaut environ 0,745 pour T_s=0, 1,51 pour T_s = 1 et 1,94 pour T_s = 1,5.

A N N E X E III

Pour chaque segment $A_\ell\ A_{\ell+1}$, on retrouve les mêmes conditions que celles obtenues en annexe I :

a) si $\theta_\ell \leq -q_\ell\ u_\ell$ ou $\theta_\ell \geq q_\ell\ u'_\ell$: $p_v(q_\ell) = 1$

b) si $o \leq \theta_\ell \leq q_\ell v'_\ell$: $p_v(q_\ell) = \frac{1}{2}\left[K_{q_\ell}(\dagger_{o,q_\ell}, \theta_\ell) + K'_{q_\ell}(\dagger_{q_\ell,q_\ell}, -\theta_\ell) \wedge' {}_{q_\ell}(\dagger_{q_\ell,q_\ell}, -\theta_\ell)\right]$

c) si $-q_\ell v_\ell \leq \theta_\ell < o$: $p_v(q_\ell) = \frac{1}{2}\left[K_{q_\ell}(\dagger_{o,q_\ell}, \theta_\ell) \lambda_{q_\ell}(\dagger_{o,q_\ell}, \theta_\ell) + K'_{q_\ell}(\dagger_{q_\ell,q_\ell}, -\theta_\ell)\right]$

d) si $-q_\ell u_\ell < \theta_\ell < -q_\ell v_\ell$: $p_v(q_\ell) = \frac{1}{2} K'_{q_\ell}(\dagger_{q_\ell,q_\ell}, -\theta_\ell)$

e) si $q_\ell v'_\ell < \theta_\ell < q_\ell u'_\ell$: $p_v(q_\ell) = \frac{1}{2} K_{q_\ell}(\dagger_{o,q_\ell}, \theta_\ell)$

l'indice ℓ indiquant qu'il s'agit du segment $A_\ell\ A_{\ell+1}$. Or on a :

$$\dagger_{k,q_\ell} = \left[h_\ell + \frac{k}{q_\ell}(h_{\ell+1} - h_\ell)\ \frac{1}{\sqrt{2}\ \sigma_g}\right]$$

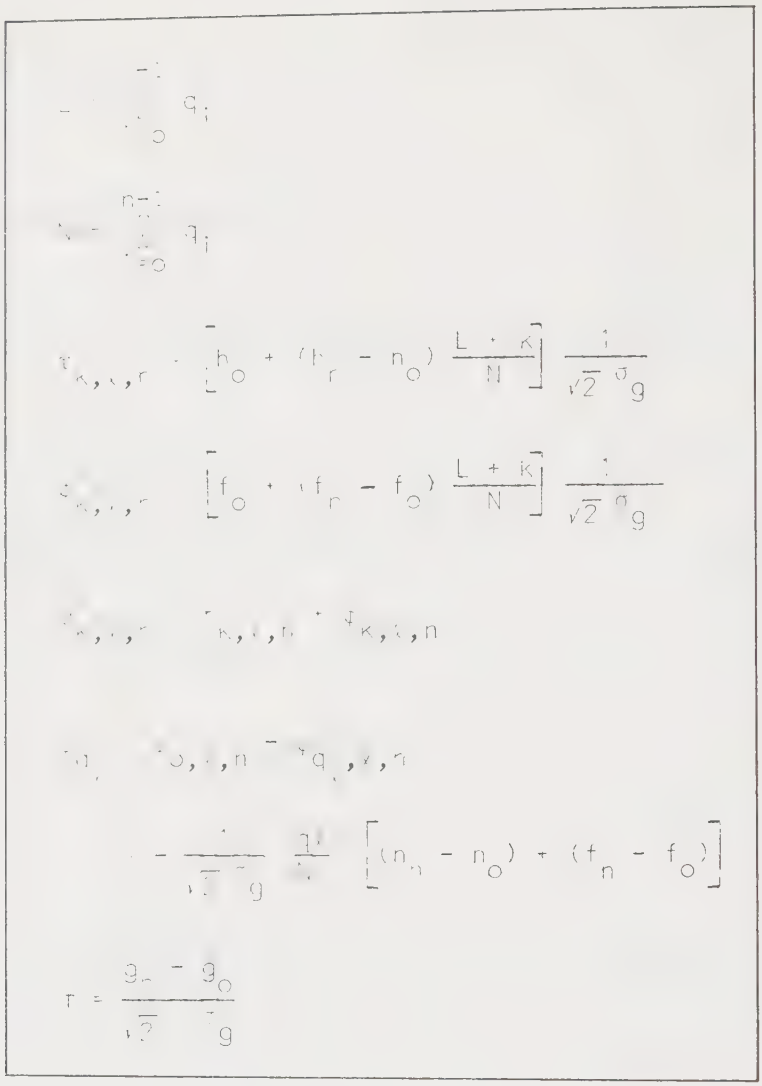
et comme

$$h_\ell + f_\ell + g_\ell = h_o + f_o + g_o + \left[(h_n + f_n + g_n) - (h_o + f_o + g_o)\right] \frac{\sum_{i=o}^{\ell-1} q_i}{\sum_{i=o}^{n-1} q_i}$$

il vient

$$h_{\ell+1} - h_\ell = \left|(h_n + f_n + g_n) - (h_o + f_o + g_o)\right| \frac{q_\ell}{\sum_{i=o}^{n-1} q_i} + f_\ell + g_\ell - f_{\ell+1} - g_{\ell+1}$$

Posons alors :



- N est le nombre total de points de la coupe (si n=1 , $N = q_o$),
- L est le nombre total de points sur l'ensemble des segments de la coupe numérotés de 0 à $\ell - 1$ (si n=1 , L=0),
- $\tau_{k,\ell,n}$ est une fonction de la hauteur des points A_o et A_n au dessus du sol ($\tau_{k,\ell,n} = t_{k,q_o}$ si n=1),
- $\phi_{k,\ell,n}$ est une fonction du mouvement lent ($\phi_{k,\ell,n} = o$ si n=1) ,
- t une v.a gaussienne réduite comprise entre $\pm \frac{T_g + T'_g}{\sqrt{2}}$

Dans ces conditions :

$$(182)\quad \dagger_{k,q_\ell} = \psi_{o,\ell,n} - \frac{k}{q_\ell}\,\psi_{q_\ell} + \frac{L+k}{N}\,\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_g}\left[g_o - g_\ell - \frac{k}{q_\ell}\,(g_{\ell+1} - g_\ell)\right]$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_g}\left[f_\ell + \frac{k}{q_\ell}\,(f_{\ell+1} - f_\ell)\right]$$

En outre

$$\theta_\ell = \frac{g_{\ell+1} - g_\ell}{\sqrt{2}\,\sigma_g} - \dagger_{q_\ell}$$

avec

$$\dagger_{q_\ell} = \dagger_{o,q_\ell} - \dagger_{q_\ell,q_\ell} = \psi_{q_\ell} + \frac{g_{\ell+1} - g_\ell}{\sqrt{2}\,\sigma_g} - \frac{q_\ell}{N}\,\dagger$$

et par conséquent

$$(183)\quad \boxed{\theta_\ell = \frac{q_\ell}{N}\,\dagger - \psi_{q_\ell}}$$

soit encore

$$(184)\quad \boxed{\dagger = \frac{N}{q_\ell}\,(\theta_\ell + \psi_{q_\ell})}$$

Or si l'on pose

$$(185)\quad \dagger_\ell = \frac{g_\ell - g_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g}\quad,\quad \dagger_{\ell+1} = \frac{g_{\ell+1} - g_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g}$$

($\dagger$, $\dagger_\ell$, $\dagger_{\ell+1}$ étant des v.a gaussiennes réduites indépendantes), il vient

$$\dagger_{o,q_\ell} = \psi_{o,\ell,n} + \frac{L}{N}\,\dagger - \dagger_\ell - \frac{f_\ell}{\sqrt{2}\,\sigma_g}$$

$$\dagger_{q_\ell,q_\ell} = \psi_{q_\ell,\ell,r} + \frac{L+q_\ell}{N}\,\dagger - \dagger_{\ell+1} - \frac{f_{\ell+1}}{\sqrt{2}\,\sigma_g}$$

Donc

$$t_{o,q_\ell} + \frac{k}{q_\ell}\,\theta_\ell = \psi_{o,\ell,n} - \frac{k}{q_\ell}\,\psi_{q_\ell} - t_\ell - \frac{f_\ell}{\sqrt{2}\,\sigma_g} + \frac{L+k}{N}\,t$$

$$= \psi_{k,\ell,n} - t_\ell - \frac{f_\ell}{\sqrt{2}\,\sigma_g} + \frac{L+k}{N}\,t$$

et

$$t_{q_\ell,q_\ell} - \frac{k}{q_\ell}\,\theta_\ell = \psi_{q_\ell,\ell,n} + \frac{k}{q_\ell}\,\psi_{q_\ell} - t_{\ell+1} - \frac{f_{\ell+1}}{\sqrt{2}\,\sigma_g} + \frac{L+q_\ell-k}{N}\,t$$

$$= \psi_{q_\ell-k,\ell,n} - t_{\ell+1} - \frac{f_{\ell+1}}{\sqrt{2}\,\sigma_g} + \frac{L+q_\ell-k}{N}\,t$$

Or, en revenant à la définition de $F(t_{o,q_\ell} + \frac{k}{q_\ell}\,\theta_\ell)$ et $F(t_{q_\ell,q_\ell} - \frac{k}{q_\ell}\,\theta_\ell)$, on peut écrire :

(186)

$$\left|\begin{aligned} F(t_{o,q_\ell} + \tfrac{k}{q_\ell}\,\theta_\ell) &= P_r\left\{\frac{g_{\ell,k} - g_\ell}{\sqrt{2}\,\sigma_g} \leqslant \psi_{k,\ell,n} - \frac{g_\ell - g_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g} - \frac{f_\ell}{\sqrt{2}\,\sigma_g} + \frac{L+k}{N}\,t\right\} \\ &= P_r\left\{\frac{g_{\ell,k} - g_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g} \leqslant \psi_{k,\ell,n} - \frac{f_\ell}{\sqrt{2}\,\sigma_g} + \frac{L+k}{N}\,t\right\} \\ &= F\left(\psi_{k,\ell,n} - \frac{f_\ell}{\sqrt{2}\,\sigma_g} + \frac{L+k}{N}\,t\right) \end{aligned}\right.$$

et

$$\left|\begin{aligned} F(t_{q_\ell,q_\ell} - \tfrac{k}{q_\ell}\,\theta_\ell) &= P_r\left\{\frac{g_{\ell,q_\ell-k} - g_{\ell+1}}{\sqrt{2}\,\sigma_g} \leqslant \psi_{q_\ell-k,\ell,n} - \frac{g_{\ell+1} - g_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g} - \frac{f_{\ell+1}}{\sqrt{2}\,\sigma_g} + \frac{L+q_\ell-k}{N}\,t\right\} \\ &= P_r\left\{\frac{g_{\ell,q_\ell-k} - g_o}{\sqrt{2}\,\sigma_g} \leqslant \psi_{q_\ell-k,\ell,n} - \frac{f_{\ell+1}}{\sqrt{2}\,\sigma_g} + \frac{L+q_\ell-k}{N}\,t\right\} \\ &= F\left(\psi_{q_\ell-k,\ell,n} - \frac{f_{\ell+1}}{\sqrt{2}\,\sigma_g} + \frac{L+q_\ell-k}{N}\,t\right) \end{aligned}\right.$$

Les termes $\psi_{k,\ell,n}$ et $\psi_{q_\ell - k,\ell,n}$ ne dépendent, à une interpolation près, que des conditions analytiques aux extrêmités de la coupe (c'est-à-dire h_o, h_n, f_o, f_n) ; les termes f_ℓ et $f_{\ell+1}$, quant à eux, traduisent l'effet de la tendance aux points b_ℓ et $b_{\ell+1}$.

Par suite en posant :

$$K_{q_\ell}\left(\psi_{o,\ell,n}, \frac{f_\ell}{\sqrt{2}\,\sigma_g}, t\right) = \prod_{k=1}^{q_\ell - 1} F\left(\psi_{k,\ell,n} - \frac{f_\ell}{\sqrt{2}\,\sigma_g} + \frac{L+k}{N} t\right)$$

$$K'_{q_\ell}\left(\psi_{q_\ell,\ell,n}, \frac{f_{\ell+1}}{\sqrt{2}\,\sigma_g}, -t\right) = \prod_{k=1}^{q_\ell - 1} F\left(\psi_{q_\ell - k,\ell,n} - \frac{f_{\ell+1}}{\sqrt{2}\,\sigma_g} + \frac{L+q_\ell - k}{N} t\right)$$

etc ....

on obtient comme probabilité d'intervisibilité entre les points A_ℓ et $A_{\ell+1}$ une expression $E[p_v(q_\ell)]$ analogue à celle de la formule (59) où intervient non seulement la hauteur des extrêmités A_o et A_n au dessus du sol mais encore l'expression analytique de la tendance.

ANNEXE IV

LA SIMULATION

1- DEFINITION

Le mot simulation [5] est susceptible de recouvrir des notions extrêmement différentes, telles que :

- expérimentation sur des modèles réduits, comme c'est le cas pour l'étude en soufflerie des avions ;
- utilisation d'analogies physiques pour représenter certains phénomènes (cuve rhéographique, simulations sur calculateur analogique, etc...) ;
- mise en oeuvre de simulateurs d'entraînement ;
- représentation sur ordinateur d'un système quelconque (par exemple économique) en formulant le problème au moyen d'expressions mathématiques ou logiques, de façon à constituer un modèle qui décrive exactement le système étudié ; les données et les résultats du modèle de simulation se présentent alors sous la forme d'informations et l'on examine les états successifs pris par le système au cours du temps.

On peut donc dire, en empruntant cette définition aux auteurs de Simula [22,23], que :

"La simulation, c'est l'art de faire des expériences sur un modèle, de façon à en tirer des conclusions sur la réalité".

Dans ce qui suit, on considérera uniquement le cas des simulations effectuées sur calculateur (numérique, analogique ou hybride).

2- PRINCIPES ESSENTIELS [6 à 19]

2-1- LE MODELE

La simulation, de par sa définition même, nécessite la réalisation d'un modèle. Ce modèle, dans le cas qui nous occupe, est purement abstrait : c'est un ensemble d'opérations mathématiques et logiques et de choix effectués d'après certains critères. Le déroulement de l'enchaînement de ces opérations est résumé par un organigramme. Remarquons que les formules mathématiques, plus ou moins compliquées, qui sont utilisées dans les modèles peuvent être traitées soit sur ordinateur, soit sur calculateur analogique, soit encore sur un ensemble hybride, le choix du moyen de calcul dépendant en particulier de la nature du problème ; toutefois, comme on le verra par la suite, l'emploi d'un calculateur hybride est en général particulièrement intéressant, surtout pour la simulation en temps réel de systèmes physiques comportant des dispositifs mécaniques et hydrauliques, des asservissements ou encore des aéronefs.

2-2- SIMULATIONS DETERMINISTES ET SIMULATIONS STOCHASTIQUES

On a l'habitude de considérer deux sortes de simulations, selon que le hasard intervient ou non. Celles où le hasard n'intervient pas sont dites "déterministes", les autres "stochastiques" ou "aléatoires".

Par exemple la simulation de la mise en orbite d'un satellite est déterministe si du moins on suppose parfaitement connus tous les paramètres (poussée des tuyères de la fusée, consommation en carburant, caractéristiques de l'atmosphère au moment du départ, etc ...) ; en effet la trajectoire de la fusée peut se calculer entièrement en utilisant des lois physiques bien connues (bien que souvent complexes à formuler). Par contre, le problème de la commande des feux rouges sur une avenue diffère fondamentalement du précédent du fait qu'on doit représenter la circulation des véhicules, laquelle est soumise aux lois du hasard ; il faut alors recréer le hasard artificiellement, c'est-à-dire simuler des arrivées de véhicules dont la loi de probabilité soit la même que celle du phénomène étudié. On a affaire dans ce cas à une simulation stochastique. Notons à ce propos que, dans le cas où la simulation stochastique fait appel à des méthodes de génération de nombres aléatoires, elle est dite de "Monte Carlo" ; sinon elle est dite "historique" car alors les valeurs des différentes variables aléatoires (v . a) entrant dans la simulation sont des valeurs observées dans

2-3- INTRODUCTION DU TEMPS

Une autre caractéristique qu'ont souvent les modèles de simulation est d'être dynamique, c'est à dire de représenter le déroulement dans le temps de certains phénomènes. La distinction entre modèle dynamique et modèle statique est parfois floue dans le cas déterministe. Par contre, dans le cas des phénomènes aléatoires, la notion de modèle dynamique prend tout son sens par suite de la distinction essentielle entre le futur aléatoire et le passée connu.

Quoiqu'il en soit, la simulation cherche, dans de nombreuses applications, à reproduire un déroulement réel, donc continu. Le respect strict de cette continuité du temps n'est bien entendu concevable qu'avec les calculateurs analogiques. L'ordinateur par contre est incompatible avec un déroulement vraiment continu. Toutefois il est possible d'en respecter l'idée en faisant progresser le temps par incréments de durée très petite, en tout cas inférieure à la durée du phénomène élémentaire le plus court. On restitue ainsi en quelque sorte la continuité de la réalité, de la même façon que le cinéma, à partir d'une analyse photographique discontinue, rend la continuité du mouvement, pour peu que le défilement des images soit assez rapide. Ce genre de simulation est dite par "incrément de temps" ou "avec horloge" ou "à pas constant" : le temps y est considéré comme une variable "exogène", c'est à dire extérieure à la simulation, extérieure au modèle lui-même.

Cette méthode se justifie quand il se passe effectivement quelque chose à chaque pas ; dans le cas contraire, elle est mal adaptée puisqu'elle conduit à passer en revue très souvent, et en pure perte de temps de calcul, une situation qui n'a pas évolué. C'est pourquoi une autre méthode consiste à n'examiner la situation que lors d'un événement nouveau. Le modèle est alors conçu de façon à déterminer à quelle époque se situent les événements produits par les précédents et le pas suivant est défini par l'instant de réalisation du premier de ces événements. Ce type de simulation, dite " par événements" ou "à pas variable" ou encore "sans horloge", considère le temps comme une variable "endogène", c'est à dire résultant de l'évolution même du système simulé.

2-4- CONVERGENCE DE SIMULATION

Dans le cas des simulations stochastiques, les données quantitatives de la simulation sont pour la plupart des variables aléatoires que l'on génère selon certains procédés qui seront décrits au paragraphe 3-3 suivant ; les résultats seront eux aussi des variables aléatoires et par conséquent la précision de la simulation dépendra directement de la durée du passage ou bien du nombre de passages de durée déterminée que l'on effectuera (par "passage", on entend une exploitation sur ordinateur, c'est à dire la séquence : introduction du programme et des données, exécution du programme et sortie des résultats).

a) Simulation à plusieurs passages :

Supposons que l'observation du modèle donne un résultat par tout ou rien : par exemple un missile sol - air a ou non atteint le but visé. On sera amené à effectuer N épreuves indépendantes de durée t (soit une durée totale équivalente T = Nt) pour déterminer la probabilité p que l'engin atteigne le but.

On a donc affaire à des épreuves non exhaustives réglées par la loi binomiale et, comme cette loi tend vers la loi normale, la variable :

$$u = \frac{N\,(f-p)}{\sqrt{Np\,(1-p)}} = \frac{\Delta p\,\sqrt{N}}{\sqrt{p\,(1-p)}}$$

où f est la fréquence observée de l'évènement, a pour fonction de répartition limite :

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{w^2}{2}}\, d\,w$$

Si l'on pose :

$$A_i = \int_{-u_i}^{u_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{w^2}{2}}\, d\,w\ ,$$

A_i est la probabilité que u soit compris entre $-u_i$ et u_i ; par exemple $A_i \simeq 0{,}95$ pour $u_i = 2$ et $A_i \simeq 0{,}87$ pour $u_i = 1{,}5$.

Donc, pour u_i donné, on a une probabilité égale à A_i pour que la fréquence observée f diffère de la probabilité réelle p d'une valeur Δp telle que :

$$|\Delta p| \leqslant u_i \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{N}}$$

La valeur absolue de l'erreur relative faite est alors au plus :

(189)
$$\boxed{\frac{|\Delta p|}{p} = u_i \sqrt{\frac{1-p}{Np}}}$$

Cette relation fixe le nombre de passage N de la simulation. Par exemple, si l'on veut avoir une quasi-certitude (95%) pour que $\frac{|\Delta p|}{p} \leqslant 0{,}1$, on obtient : $N = 400\,\frac{1-p}{p}$ (soit N = 1 200 dans le cas où p = 0,25 par exemple).

b) Simulation à un passage :

Supposons maintenant que le même événement puisse se produire plusieurs fois de suite sans que son apparition empêche la poursuite normale de la simulation (par exemple : appel d'un abonné dans une simulation de réseau téléphonique) ; il est alors possible dans ce cas d'effectuer une simulation du système étudié en un seul passage. Dans ces conditions, soit **N** le nombre de cycles de base (par exemple la minute), n le nombre total de tranches de temps (chaque tranche comprend $\frac{N}{n}$ cycles de bases), Q_j la valeur, pour la tranche j, du nombre d'événements apparus (c'est à dire, dans l'exemple cité ci-dessus, le nombre de fois où l'appel a eu lieu) et Q le nombre total d'évènements. Le Gall [16] a montré que l'on avait, sous certaines conditions que l'on ne développera pas ici :

(190)
$$\boxed{\frac{|\Delta p|}{p} = u_i \sqrt{\frac{B}{p\,N}}}$$

avec

(191)
$$\boxed{B \simeq \frac{n}{Q\,(n-1)} \left[\sum_{j=1}^{n} Q_j^2\right] - \frac{Q}{(n-1)}}$$

Dans le cas des simulations de réseau téléphonique, le Gall obtient une valeur de 5 en moyenne, mais B peut avoir des valeurs aussi faibles que 0,2.

Notons que la simulation à un seul passage demande généralement un nombre N plus élevé que la simulation à plusieurs passages mais qu'elle évite les temps perdus non négligeables des débuts de simulation. Au bout du compte elle est souvent plus économique en temps machine que la simulation à plusieurs passages. Cependant elle n'est pas applicable lorsque l'une des séquences analysées (par exemple le vol d'un engin) ne peut se reproduire un nombre suffisant de fois au cours d'un même passage.

3- GENERATION DE NOMBRES ALEATOIRES DANS LES SIMULATIONS DE MONTE-CAR

3-1- GENERALITES

Quand on simule un phénomène aléatoire sur un calculateur numérique, il faut pouvoir obtenir aisément et rapidement des suites de réalisations, indépendantes entre elles, de variables aléatoires obéissant à des lois de probabilité données. La méthode pour obtenir de telles suites doit être rapide, consommer peu de mémoire, être peu coûteuse en matériels spécifiques, permettre si possible de générer plusieurs fois la même suite de nombres.

En pratique l'obtention de chaque élément d'une suite de variables aléatoires se décompose en deux phases :

- obtention de variables aléatoires à répartition uniforme sur l'intervalle (0,1) ;

- transformation de ces variables en variables obéissant à une loi de probabilité donnée grâce à un procédé mathématique déterministe.

3-2- GENERATION DE NOMBRES ALEATOIRES A REPARTITION UNIFORME

Il existe différents procédés pour générer sur ordinateur des variables aléatoires à répartition uniforme. Parmi les plus connus, citons :

a) l'utilisation de tables de nombres au hasard, c'est à dire de tables de variables entières, indépendantes, de distribution uniforme entre 0 et 9 (une variable aléatoire comprise entre 0 et 1 s'obtient alors en écrivant 0, xxx , chaque croix x représentant une variable aléatoire entière

Les tables les plus connues sont "One Million Random Digit" de la Rand Corporation ; on peut les stocker soit sur disques magnétiques à accès rapide (disques à têtes fixes), soit sur tambours magnétiques, ce qui se révèle d'un emploi très commode.

b) La génération de variables aléatoires par des méthodes congruentielles (1). On distingue trois familles [12] :

- les méthodes multiplicatives : $x_{n+1} = a\, x_n \pmod m$;
- les méthodes mixtes : $x_{n+1} = a\, x_n + b \pmod m$;
- les méthodes additives : $x_{n+1} = x_n + x_{n-k} \pmod m$, très peu utilisées pour l'instant.

La méthode la plus couramment utilisée est la méthode multiplicative. Avec une machine à mots, on choisit m de la forme $2^k - 1$, où k est un exposant inférieur ou égal au nombre de bits du mot de calculateur, par exemple 32. On démontre que pour obtenir la meilleure indépendance entre les x_n consécutifs, a doit être du même ordre de grandeur que m et x_o doit être premier avec m. En pratique on peut prendre :

$k = 31$ d'où $m = 2^{31} - 1$

$a = 13^{13} \pmod m$

x_o = impair

La périodicité est alors de $2^{k-2} = 2^{29}$ nombres.

REMARQUE

a) Les méthodes analogiques, qui consistent à utiliser le caractère aléatoire de certains phénomènes physiques pour générer des variables aléatoires (par exemple : écrêtage d'un bruit blanc ou comptage de désintégration, procédés qui donnent des variables de Poisson), produisent des variables aléatoires d'excellente qualité. Toutefois elles présentent deux défauts :

- on ne sait pas pour l'instant coupler de tels générateurs aléatoires à un calculateur digital,
- les suites aléatoires ainsi obtenues ne sont pas répétables.

b) Les v . a générées par des méthodes numériques, congruentielles par exemple, ne sont pas totalement indépendantes entre elles ; toutefois leur corrélation est suffisamment faible pour que, dans la plupart des cas, cet inconvénient n'affecte en rien le résultat.

---

(1) On dit que deux nombres u et v sont congrus modulo m si $u - v = k\, m$, avec k entier; on note $u = v \pmod m$.

3-3- GENERATION DE NOMBRES ALEATOIRES A REPARTITION QUELCONQUE

Ayant à notre disposition une suite de variables aléatoires indépendantes et uniforme sur (0,1), il reste à obtenir une suite de variables aléatoires indépendantes obéissant à une loi donnée.

Trois méthodes sont couramment utilisées ; ce sont les méthodes dites "de la fonction de répartition", "de l'inverse de la fonction de répartition" et "de rejet" (Von Neumann) [12]. Sans vouloir insister sur cette question, disons seulement que la méthode de l'inverse de la fonction de répartition est assez commode pour la génération de variables aléatoires continues obéissant à des lois pour lesquelles il existe une fonction inver exacte ou approchée. A titre d'exemple on utilise souvent, pour la génération de variables aléatoires gaussiennes, normées et centrées, la loi inver approchée :

$$|y| = x - \frac{a_o + a_1 x + a_2 x^2}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3} \qquad (192)$$

avec

$a_o \simeq 2{,}515\ 517$ $\quad b_1 \simeq 1{,}432\ 788$

$a_1 \simeq 0{,}802\ 853$ $\quad b_2 \simeq 0{,}189\ 269$

$a_2 \simeq 0{,}010\ 328$ $\quad b_3 \simeq 0{,}001\ 308$

$x = \log\left(\frac{1}{v^2}\right)$

La méthode consiste à tirer v . a u à répartition uniforme dans (0,1), à poser $v = u$ pour $u \leqslant 0{,}5$ et $v = 1 - u$ pour $u > 0{,}5$ et à prendre $y = |y|$ ou $y = -|y|$ selon que u est supérieur ou inférieur à 0,5 [19] .

4-LANGAGES DE SIMULATION [20 à 30]

Ces dernières années ont vu naître un certain nombre de langages de programmation appliqués aux simulations sur ordinateur et plus particulièrement aux simulations par événements (les simulations par incrément de temps peuvent aisément être programmées à l'aide d'un langage scientifique classique, tel que FORTRAN ou ALGOL, ou en langage d'assemblage).

Le plus souvent ces langages sont dérivés des langages courants tels que FORTRAN et ALGOL. En effet un langage de simulation doit posséder, en plus des diverses facilités des langages habituels, certaines possibilités propres telles que :

- description de l'état d'un système à l'aide notamment de ce que l'on appelle des "mobiles" ou des "entrées", qui représentent tous les éléments qui sont la base d'une simulation et dont la gestion doit être particulièrement soignée (par exemple : les wagons dans un trafic ferroviaire, les sous-marins dans un jeu de guerre, les émetteurs dans un réseau de transmission) ;

- modification de l'état d'un système grâce à certaines instructions destinées par exemple à introduire ou retirer des mobiles, ou à les passer en revue. La particularité du langage de simulation ne réside pas tellement alors dans la possibilité de création, de destruction ou de mouvement des mobiles, mais plutôt dans le mode de gestion à la fois souple et économique ;

- commande et contrôle du système en cours d'évolution, présentation de statistiques et de résultats sous diverses formes.

Parmi les langages de simulation les plus connus, on peut citer :

- SIMULA qui est dérivé du langage scientifique ALGOL [22,23] ,
- SINSCRIPT qui est dérivé du langage général FORTRAN [24] ,
- CONTROL and SIMULATION LANGUAGE (CSL) [7,25] ,
- MILITRAN, dérivé à la fois de FORTRAN et d'ALGOL,et qui a été mis au point pour simuler des jeux de guerre [26] ,
- GENERAL PURPOSE SIMULATION SYSTEM (GPSS) [7, 27 à 29] .

D'autres langages de simulation, tels que le CSMP [30] , permettant de simuler sur machine numérique des phénomènes analogiques. Ils sont précieux, en particulier pour la mise au point de programmes analogiques lorsqu'on ignore a priori quelles échelles il faut donner aux divers grandeurs en présence.

Notons au passage qu'il n'existe pas, à notre connaissance, de langage de simulation hybride méritant vraiment ce titre. Par contre la plupart des calculateurs hybrides possèdent un FORTRAN hybride : cela suffit la plupart du temps puisque les simulations de systèmes physiques qui nécessitent l'emploi d'un calculateur analogique (associé ou non à un ordinateur) sont le plus fréquemment du type "par incrément de temps".

A N N E X E V

EVALUATION D'UN SYSTEME SOL-AIR TEMPS CLAIR

1- DESCRIPTION SOMMAIRE DU SYSTEME

Le système en question, que l'on appellera SATC (Sol Air Temps Clair) par la suite, a pour mission de détecter les avions volant à basse altitude et éventuellement de les atteindre à l'aide d'un engin téléguidé. La poursuite du but, au moment du tir, s'effectue à l'aide d'un dispositif optique, ce qui suppose que les conditions météorologiques ne soient pas trop défavorables (d'où le nom de "temps clair").

Le S A T C est monté sur un véhicule doté d'une tourelle. Il comprend essentiellement un dispositif d'acquisition et de poursuite optique ainsi qu'un engin.

a) le radar de détection est du type "doppler", afin d'éliminer les échos fixes. Le faisceau est relativement étroit en gisement (quelques degrés)et large en site (diagramme en cosécante carrée par exemple). La vitesse de rotation de l'antenne est de l'ordre de 1 tour par seconde.

Outre les circuits en hyperfréquence et à fréquence intermédiaire, le radar comporte des circuits de détection, des filtres doppler (qui permettent d'éliminer les échos fixes ou les cibles très lentes et aussi de déterminer approximativement la vitesse radiale de chaque cible détectée), des circuits de traitement du signal vidéo et un écran cathodique du type P. P. I. (gisement, distance).

Sur l'écran P. P. I. l'opérateur voit apparaître autant de "plots" qu'il y a de cibles détectées. Il en sélectionne une d'après un critère qui repose essentiellement sur la distance et la vitesse de déplacement des plots sur l'écran (il faut d'ailleurs noter que le système de traitement effectue en amont une 1ère sélection en fonction de la vitesse radiale de l'avion et de sa distance : la représentation des cibles peut ainsi prendre deux aspects selon le degré de priorité de la cible).

Dès que l'opérateur radariste a choisi un but, il oriente la tourelle dans la direction correspondante ; il contrôle à chaque instant la position de la tourelle grâce à une alidade électronique, c'est à dire un rayon lumineux qui passe par le centre de l'écran P. P. I. et qui recopie le gisement de la tourelle.

b) Le dispositif d'acquisition et de poursuite optique du but est constitué principalement d'une lunette et d'un manche qui permet à un pointeur d'orienter l'axe optique de la lunette (matérialisé par le point de croisée d'un réticule) par l'intermédiaire d'un miroir mobile. Lorsque le radariste a orienté la tourelle[1] dans la direction de l'objectif choisi, le pointeur en est averti et commence la recherche en site de l'objectif en agissant sur le manche. Dès qu'il aperçoit le but dans le champ de la lunette, il essaie de le placer au centre du réticule ; la poursuite commence alors.

c) Lorsque le pointeur a pris effectivement la cible en poursuite, il peut - sous certaines conditions - déclencher le tir de l'engin. Le guidage du missile est du type "par alignement". A chaque instant un goniomètre infrarouge, parallèle à l'axe optique de la lunette, mesure le dépointage en site et gisement entre la direction de l'engin et l'axe optique de la lunette. Les écarts angulaires correspondants sont pris en compte et traités par un petit calculateur (situé dans le poste de tir), lequel élabore des ordres de télécommande qui sont envoyés à l'engin. Ainsi le missile est asservi à rester très près de l'axe optique de la lunette:si le pointeur maintient par ailleurs l'image du but au centre du réticule, le missile passera à proximité de la cible et aura donc de fortes chances de l'atteindre.

Sans vouloir émettre une opinion sur les qualités et les défauts d'un système tel que celui qui est décrit ci-dessus, disons seulement que les performances du S A T C dépendent dans une très large mesure de la qualité du pointeur. Or, pour analyser de près l'influence du pointeur, la simulation classique (numérique, analogique ou hybride) est totalement impuissante - ainsi d'ailleurs que l'étude paramétrique - car il n'y a rien de plus difficile à simuler que le comportement de l'homme ; de plus l'expérimentation directe, quoique indispensable, donne nécessairement des enseignements limités : un vol d'avion, un tir d'engin coûtent très cher et il est par conséquent impensable d'effectuer des essais trop poussés. Seule la simulation en temps réel, avec éléments réels, va permettre d'explorer toutes les possibilités du système, étant entendu qu'un certain nombre d'essais, au sens classique du terme, demeurent nécessaires, ne serait-ce que pour "recaler" la simulation .

---

(1) asservie en gisement à l'axe optique de la lunette.

2- DESCRIPTION DE LA METHODE DE SIMULATION EN TEMPS REEL APPLIQUEE AU S A T C

2-1- PRINCIPES

Le principe de la méthode consiste à faire fonctionner réellement le système, ou du moins la majeure partie de ses éléments, et à simuler le milieu extérieur au système, c'est à dire, dans le cas présent : terrain, vol des avions, transparence de l'atmosphère, vol de l'engin. Bien entendu ceci suppose que l'on réalise des dispositifs particuliers matérialisant la frontière entre le S A T C et le milieu extérieur simulé.

Le S A T C étant un système sol air, il va de soi que ses performances sont très étroitement liées aux caractéristiques du terrain. En effet le terrain influe sur :

- la trajectoire des avions, du moins quand ceux-ci volent en "suivi de sol", c'est à dire en épousant au mieux les accidents du relief ;

- l'intervisibilité entre les cibles et les éléments du système chargés de la détection (radar) et de la poursuite (lunette) ;

- les échos de sol radar (ou clutter) ;

- la propagation des ondes radioélectriques portant les ordres de télécommande de l'engin.

Il importe donc que le terrain soit représenté d'une manière suffisamment réaliste si l'on veut que la méthode d'évaluation par simulation en temps réel garde toute sa valeur. L'étude de ce problème a montré, ainsi qu'on le verra tout au long des trois parties suivantes, que l'on pouvait en définitive introduire le terrain de trois manières :

- par digitalisation et mémorisation de terrains réels,

- par création de terrains synthétiques statistiquement identiques à des terrains réels (les altitudes d'un terrain synthétique étant en définitive utilisées de la même manière que celles d'un terrain réel),

- sous forme d'un nombre limité de lois statistiques (loi de distribution et fonction de corrélation des altitudes), ce qui permet une étude probabiliste des phénomènes liés au sol (par exemple intervisibilité optique ou propagation d'ondes radioélectriques).

Le choix du procédé dépend essentiellement de la nature des phénomènes physiques que l'on cherche à simuler ainsi que du contexte de l'évaluation.

2-2- DEROULEMENT

Dans le cas particulier du S A T C, l'évaluation se déroule en plusieurs phases succesives.

1ère phase : Préparation des trajectoires.

Considérons un terrain (réel ou synthétique) que l'on stocke en mémoire de calculateur sous forme d'un ensemble d'altitudes situées aux sommets d'un quadrillage régulier (voir 2e partie). On choisit tout d'abord sur ce terrain un emplacement S du S A T C, en tenant compte de certaines considérations relatives à l'emploi opérationnel du système. Puis on détermine un certain nombre de trajectoires d'avions, chaque trajectoire C_j étant définie par sa projection horizontale et la hauteur moyenne de vol de l'avion au-dessus du sol : un programme dit de "suivi de sol" permet de déterminer à chaque instant t_i la hauteur de chacun des avions au dessus de la coupe de terrain intersection du sol et du cylindre vertical contenant la trajectoire.

Chaque trajectoire C_j étant ainsi définie, il est alors possible :

a) de calculer à l'instant t_i les coordonnées sphériques (distance ρ_{ij}, gisement α_{ji} et site β_{ji}) de la position M_{ji} du jème avion par rapport à S, ainsi que le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{ji}}$ correspondant défini par ses composantes radiale V_{Rji}, tangentielle V_{Tji} et normale V_{Nji} (figure 110).

b) de déterminer si S voit M_{ji}, c'est-à-dire si la droite SM_{ji} n'est pas interceptée par la coupe de terrain située dans le plan vertical passant par SM_{ji} (figure 111).

La phase préparatoire se concrétise en définitive par un tableau T à deux indices qui, pour la trajectoire C_j, a la forme suivante :

paramètre \ temps	t_o	.....	t_i	.....
ρ_j	ρ_{jo}		ρ_{ji}	
α_j	α_{jo}		α_{ji}	
β_j	β_{jo}		β_{ji}	
V_{Rj}	V_{Rjo}		V_{Rji}	
V_{Tj}	V_{Tjo}		V_{Tji}	
V_{Nj}	V_{Njo}		V_{Nji}	
visibilité	0 ou 1		0 ou 1	

2e phase : Déroulement en temps réel de la simulation.

La phase de préparation étant terminée, la simulation proprement dite peut démarrer. Pour cela, on suppose tous les avions situés à leur point de départ et à l'instant t_o (choisi par un opérateur) le vol des avions commence, la position des différentes cibles à l'instant t_i étant lue dans le tableau T : à chaque instant $t_i = i \Delta t$ (avec Δt = 100 ms par exemple) on examine simultanément l'état du système en fonctionnement réel et celui du milieu extérieur simulé, afin d'étudier les caractéristiques de chacune des fonctions du système (détection, poursuite optique, guidage de l'engin).

a) Considérons tout d'abord l'aspect détection des cibles par le radar de veille. On observe à chaque instant s'il y a coïncidence entre le gisement α d'une cible et le faisceau de l'antenne radar. Si tel est le cas, il y a lieu de générer des échos radar, c'est à dire des impulsions d'émission retardées par rapport à elles d'une valeur proportionnelle à la distance et affectées d'un effet doppler proportionnel à l'amplitude V_R de la vitesse radiale de l'avion. Pour ce faire on utilise un "générateur d'échos radar" (G.E.R.) lequel, à partir d'informations et d'ordres fournis par l'ordinateur, injecte des signaux convenables juste en aval des circuits de détection, c'est à dire encore en amont des filtres doppler et des circuits de traitement du signal vidéo.

Le G. E. R. doit être capable de simuler plusieurs cibles simultanément (par exemple 6 à 8). A chaque cible correspond une information vidéo du type doppler, c'est à dire, dans le cas d'une détection par enveloppe, une séquence d'impulsions modulées en amplitude par un signal basse fréquence M(t) de la forme :

$$M(t) = \frac{A + \varepsilon(t)}{\rho 4} \cos 2\pi F_d t \cdot g^2 (\alpha - \alpha_o , \beta - \beta_o) + B(f, \alpha_o, \beta_o, t \quad (193)$$

expression où :

- ρ est la distance radar-avion ;
- A est un terme proportionnel à la surface équivalente moyenne de l'avion ;
- $\varepsilon(t)$ est un terme correctif traduisant les fluctuations de l'écho de cible ;
- F_d est la fréquence doppler relative à l'avion considéré (elle est proportionnelle à sa vitesse radiale V_R) ;
- $g (\alpha - \alpha_o, \beta - \beta_o)$ représente le diagramme d'antenne normalisé, α et β d'une part α_o et β_o d'autre part définissant, en gisement et site, les directions respectives de la droite radar-cible et de l'axe de l'antenne ;
- $B (f, \alpha_o, \beta_o, t)$ est la densité spectrale d'amplitude, variable avec le temps et la position d'antenne, des échos parasites, clutter notamment (une méthode de détermination du bruit dû au clutter est décrite dans la 4e partie, chapitre I).

Le signal vidéo correspondant à chaque cible est acheminé vers les circuits de traitement, via les filtres doppler, puis présenté sur le scope P.P.I comme s'il s'agissait de cibles réelles. Ainsi l'opérateur radar va pouvoir effectuer la sélection du but dans les mêmes conditions que celles qu'il rencontrerait au cours d'une expérimentation directe ; puis, après avoir choisi le but, il pourra orienter la tourelle en positionnant convenablement l'alidade sur le plot correspondant à la cible sélectionnée.

On remarquera que le G. E. R. est branché en aval des circuits de détection et que, par suite, les circuits hyperfréquence et à fréquence intermédiaire ne sont pas pris en compte par cette évaluation. Cela est pratiquement sans importance, étant donné que les radars doppler sont des matériels maintenant bien connus et que par ailleurs il existe des méthodes désormais classiques pour les tester. Toutefois il serait possible, si le besoin s'en

faisait sentir, de réaliser un générateur d'échos radar fonctionnant en hyperfréquence, c'est-à-dire capable d'injecter des signaux au niveau du guide d'onde de l'antenne : le G.E.R. d'écrit ci-dessus présente toutefois l'avantage d'un coût sensiblement moins élevé.

b) Dès que la tourelle est orientée dans la direction de l'avion sélectionné par le radariste, le pointeur doit pouvoir effectuer l'acquisition puis la poursuite du but. Pour ce faire il est nécessaire de réaliser un dispositif de visualisation capable de représenter le terrain, le but et l'engin. Une solution consiste à utiliser un moniteur de télévision placé devant la lunette et alimenté par un signal vidéo issu de deux caméras TV (une caméra "horizon" et une caméra "cible") et convenablement traité (figure 112).

La caméra "horizon", mobile en site et gisement, observe une bande de papier plaquée sur un cylindre vertical et sur laquelle sont tracés en perspective les contours du terrain vus du point S (la détermination et le tracé de ces contours s'effectuent automatiquement par programme). Cette caméra est commandée par le manche du pointeur, de la même manière que le miroir mobile de la lunette (que l'on bloque d'ailleurs afin que le moniteur TV reste dans le champ de la lunette). Ainsi, en agissant sur le manche, le pointeur voit l'image du terrain défiler devant ses yeux de la même manière que dans la réalité (convenablement "habillée" cette image a d'ailleurs sensiblement l'aspect d'une photographie en noir et blanc).

La caméra "cible", mobile elle aussi en site et gisement, observe une maquette d'avion orientale autour de ses axes de roulis, tangage et lacet : elle est équipée d'un objectif à focale variable (zoom), commandé par le calculateur, qui permet de faire varier la taille de l'image du but en fonction de la distance. La position de la maquette est définie par l'orientation du vecteur vitesse $\vec{V}$ de l'avion par rapport à la direction de l'avion. Quant au dépointage de la caméra, il est égal à l'écart entre la direction de la caméra horizon (donc de l'axe optique de la lunette) et celle de l'avion simulé. Le pointeur a pour mission de maintenir l'image de la cible aussi près que possible du centre de l'écran de télévision (qui matérialise l'axe optique de la lunette) en agissant sur le manche.

Les signaux vidéo issus des deux caméras sont mélangés dans un "mélangeur" (ce matériel permet notamment d'agir sur le contraste entre la cible et le paysage). Puis le signal résultant est acheminé vers un "truqueur", dispositif chargé de présenter sur l'écran TV un carré blanc de taille

réglable et plus ou moins décentré par rapport au centre optique de l'écran ; ce carré blanc représente, sous une forme stylisée, l'engin tel qu'il serait vu par le pointeur.

c) Dès que l'ordre de mise à feu du missile est donné, la simulation du vol de l'engin commence ; elle se déroule parallèlement aux autres activités : veille radar et poursuite optique. Compte tenu des contraintes de temps, cette partie de la simulation doit, à moins de disposer d'un ordinateur très puissant être effectuée en analogique (ou en hybride). Soient ΔG_i et ΔS_i les écarts en gisement et site à l'instant t_i entre la direction calculée du missile et l'axe de visée ; ces valeurs correspondent aux dépointages qui seraient, dans la réalité, mesurés par le goniomètre infrarouge. A l'instant t_i, ΔG_i et ΔS_i sont envoyés dans le calculateur de bord du S A T C, lequel élabore des ordres de télécommande, c'est à dire en définitive des éléments correctifs destinés à être injectés dans le calculateur analogique. Il est ainsi possible de calculer, en analogique, la position future de l'engin à l'instant t_{i+1}, puis, en fonction de l'action du pointeur sur le manche, les nouvelles valeurs des dépointages ΔG_{i+1} et ΔS_{i+1}.

La simulation s'arrête lorsque l'engin est passé au plus près de l'avion ; le but est considéré comme atteint si le missile passe à une distance de l'avion inférieure ou égale à une valeur critique d (de l'ordre de quelques mètres).

REMARQUE

Le guidage de l'engin ne peut s'effectuer convenablement que si le signal radioélectrique émis par l'émetteur de télécommande situé en S parvient avec un niveau suffisant au récepteur placé à bord du missile ; il faut donc s'assurer à chaque instant t_i que tel est bien le cas. Le problème de la propagation des ondes hertziennes au voisinage du sol est traité dans la 4e partie, chapitre II.

3- MOYENS A METTRE EN OEUVRE POUR L'EVALUATION

Les moyens nécessaires pour effectuer une telle simulation sont rosso-modo les suivants :

- le système à évaluer, avec ses opérateurs,
- un ordinateur "temps réel" de puissance suffisante (du type CII 10 020 ou I B M 1 800 au minimum),
- un calculateur analogique comprenant au moins 250 amplificateurs et connecté en hybride à l'ordinateur,
- des matériels "temps réel" permettant l'échange d'ordres et de données entre l'ordinateur et le système,
- des dispositifs spéciaux matérialisant la frontière entre le système en cours d'évaluation et le milieu extérieur simulé (dans le cas présent : générateur d'échos radar et dispositif de visualisation),
- un ensemble de programmes, notamment pour simuler tout l'environnement du système.

B I B L I O G R A P H I E

[1] Terrain Analysis in Operational Research - Proceedings of a seminar held at Bolkesjø,Norway - 1 - 4 july 1968 (Nato Confidential). Non édité.

[2] JAVELOT M. - Etude Statistique du Relief - Tomes 1 à 6 - n° 2169/DET/SE/SEF du 6 juin 1967. Non édité.

[3] JAVELOT M. - Etude Statistique du Relief - n° 3132/DET/SE/SEF du 1er septembre 1967. Non édité.

[4] JAVELOT M. - Etude Statistique du Relief - n° 0249/CELAR/ICCM du 21 mai 1968 (texte de l'exposé fait à Bolkes jø, Norvège, en juillet 1968 et publié dans le document cité en référence |1|). Non édité.

[5] I B M Corp - Bibliography on Simulation. Rep. 320 - 0924 . 0 - 1966.

[6] BRENNAN and LINEBARGER - A survey of Digital Simulation - Simulation 3, n° 6 - 1964.

[7] D'ANSELME H. : La simulation - Institut de Calcul Scientifique I B M. Note technique n° 22 - 5 mai 1964.

[8] MULLER Y. - La simulation - Institut de Calcul Scientifique I B M. Note technique n° 22 - 5 mai 1964.

[9] AGARD J. - L'art de la Simulation (bilan de quelques expériences) - Journées AFIRO sur la Simulation - 10 novembre 1966.

[10] NAYLOR T. H., BALINTFY J. L., BURDICK D.S. and CHU K. - Computer Simulation Technics - J. Wiley - 1966.

[11] CHORAFAS D. N. - La Simulation Mathématique et ses applications - Dunod - 1966.

[12] Centre Interarmée de Recherche Opérationnelle - Semaine de Perfectionnement sur la Simulation - 1969.

[13] EHRENFELD S. and BEN-TUVIA S. - The Efficiency of Statistical Simulation Procedures - Technometrics 4 - mai 1962 - pp 257 à 275.

[14] STENGEL J. - Modèles Mathématiques ou Modèles de Simulation - Journées AFIRO sur la Simulation - 10 novembre 1966.

[15] HAMMERSLEY and HANDSCOMB - Monte Carlo Methods - John Wiley and Sons - New - York - 1965.

[16] LE GALL - Les Méthodes de Simulations Aléatoires et leurs Applications à l'Etude du Problème de Télétrafic - Comm. et Electrom. Socotel - Avril 1963 - n° 4 - pp 44 à 58.

[17] LE GALL - Convergence des Simulations et Applications aux Réseaux Téléphoniques - Journées AFIRO sur la Simulation - 10 novembre 1966.

[18] RALSTON A. et WILF H. S. - Méthodes Mathématiques pour Calculateurs Arithmétiques - Dunod - 1965.

[19] HASTINGS C. - Approximations for Digital Computers - Princeton University Press - 1955.

[20] CLANCY and FINEBERG - Digital Simulation Languages : a Critic and a Guide-Proc-AFIPS Fall Joint Com. Conf. Vol. 27 - 1965 - pp 23 à 36.

[21] Dr DAMES - Simulation Software - Datamation - October 1965 - pp 29 à 34.

[22] DAHL, NYGAARD - SIMULA, a Language for Problems Formulation and Programming - Norvegian Computing Center - 1964.

[23] DAHL, NYGAARD - SIMULA, a ALGOL Based Simulation Language - Comm. ACM - Septembre 1966 - pp 671 à 679.

[24] DIMSDALE and MARKOWITZ - A Description of the SIMSCRIPT Language - I B M Syst. J. 3, 1964 - pp 57 à 67.

[25] BUXTON J. N. and LASKI J. G. - Control and Simulation Language - Esso Petroleurn C° Ltd and United Kingdom Ltd. Reprinted in the Computer Journal - 5 mars 1964.

[26] System Research Group, Inc - MILITRAN Reference Manual - 1964.

[27] PRECIGOUT M. - Un système de Simulation G P S S - Journées AFIRO sur la Simulation - 10 novembre 1966.

[28] HERSCOVITCH and SCHNEIDER - GPSS III, an Expanded General Purpose Simulation - I B M System Journal, n° 3 - 1965 - pp 174 à 184.

[29] BERNARD R. et GRANDJEAN Ch. - Simulation de Systèmes à Attente en Téléphonie - Application du Langage GPSS - Revue des Télécommunications - N° 44/4 - 1969 - pp 350 à 360.

[30] I B M - Système 36 0 - Continuons System Modeling Program (360 A - C X - 16 X) - User's Manual - 1967.

[31] ROUGET G. - Etude des Moments de la Loi Normale Tronquée - Revue de Statistiques Appliquées - 1962 - Vol. 10, n° 2 - pp 49 à 61.

[32] AERO - Rapport Technique n° 3/C du 10 février 1967, chap. 1 (Etude des moments du 1er et du 2e ordre de la loi normale tronquée de manière symétrique). Non édité.

[33] AERO - Rapport Technique n° 2 du 31 décembre 1967, chap. 3 (Etude des moments du 1er et 2e ordre de la loi normale tronquée de manière non symétrique). Non édité.

[34] PEARSON - Tracts for Computers n° XXV (Random Normal Deviates) - Cambridge University Press - 1954 - pp 12 et 13.

[35] RICE S.O. - Mathematical Analysis of Random Noise - II B S T J 24/46 - 1945 - secs 3-3, 3-4, 3-6, 3-8.

[36] SKOLNIK M. - Introduction to Radar Systems - Mc Graw - Hill Book Company, Inc.

[37] BULLINGTON K. - Radio Propagation at Frequences above 30 Megacycles - PIRE - octobre 1947.

[38] LIBOIS L.J. - Les Transmissions par Faisceaux Hertziens - E N S T - 1956.

[39] DAVID P. et VOGE J. - Cours de Radioélectricité Générale-4 - Propagation des Ondes - Eyrolles - 1961.

[40] PEYRET B. G. - Eléments de Calcul des Probabilités - Eyrolles - 1964.

[41] AERO - Rapport Technique n° 2 du 31 décembre 1967, chapitre 1 (Théorie du lissage d'une fonction de 2 variables). Non édité

[42] BLANC-LAPIERRE A. et FORTET R. - Théorie des Fonctions Aléatoires - Masson - 1953.

[43] SAVELLI - Thèse de Doctorat ès Sciences - Physique - 1958.

|44| WIENER - The Ergodic Theorem - Duke Math. Journ., 5, pp 1 à 18 - 1939.

|45| BOCLE J. - Thèse de Doctorat ès Sciences Mathématiques - 1959.

FIGURES

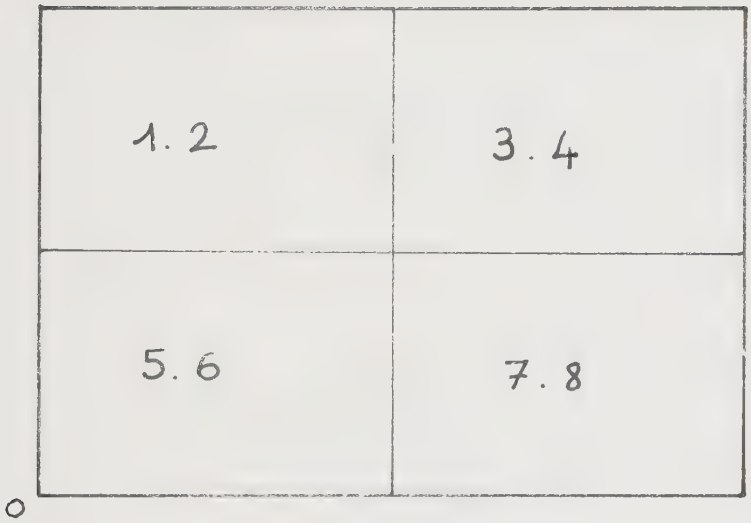


Fig 1

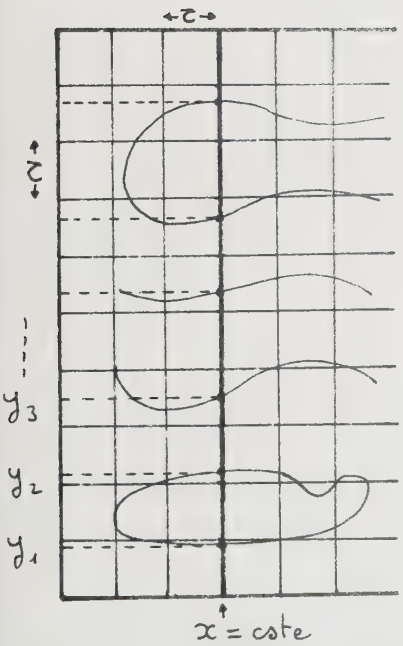


Fig 2

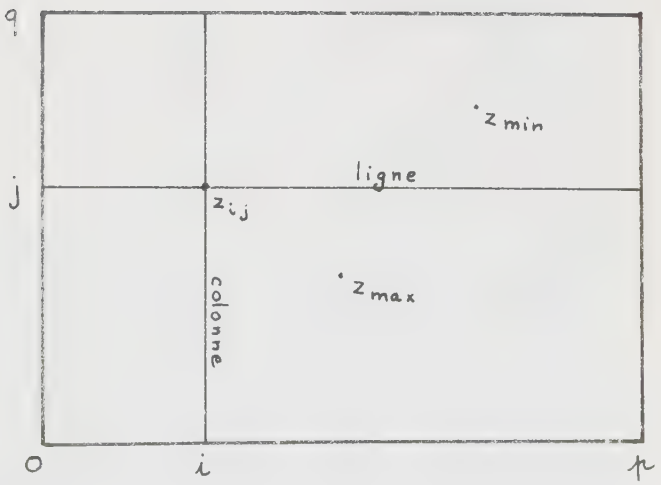


Fig 3

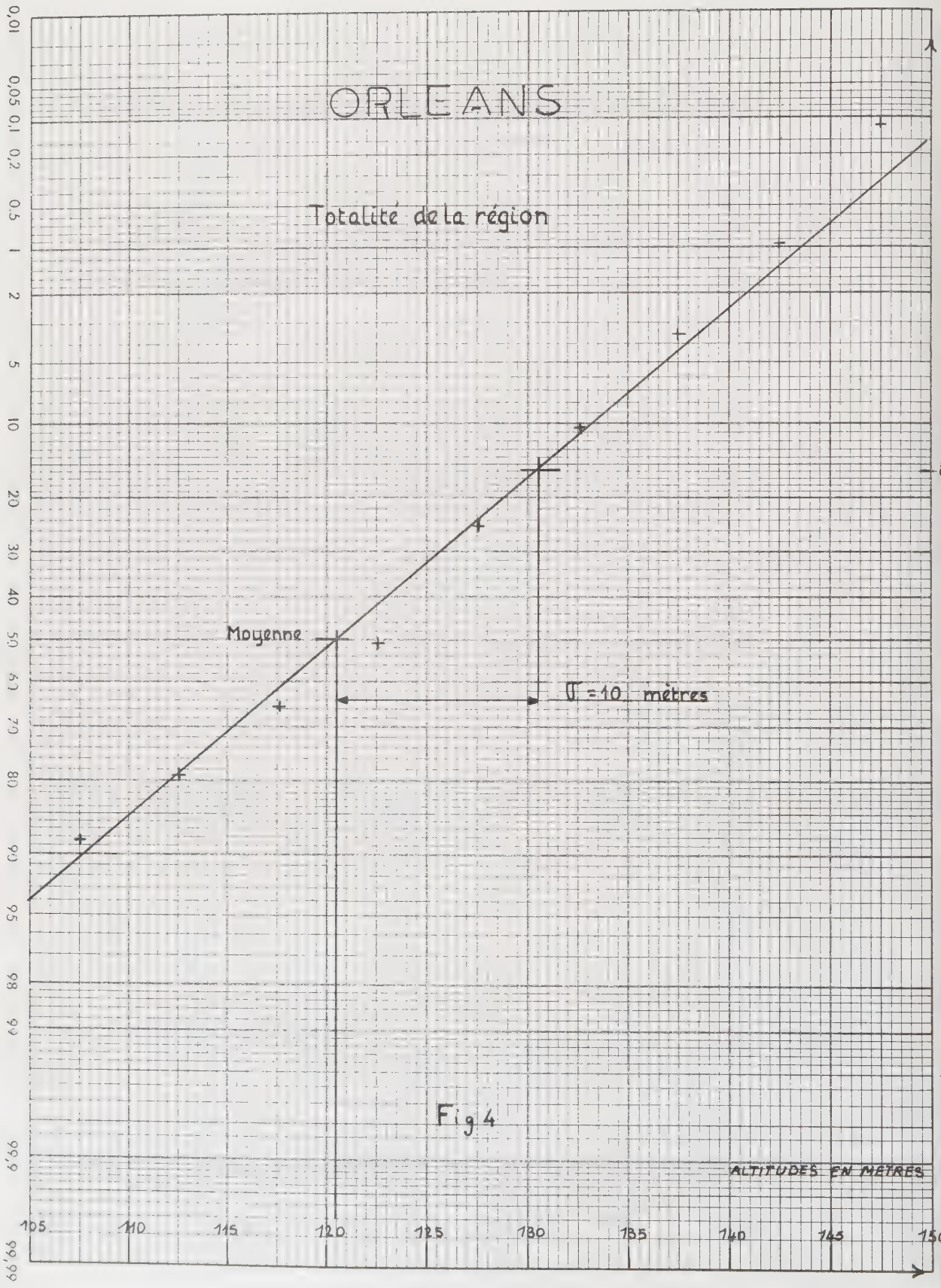

ORLEANS
Totalité de la région
Moyenne
σ = 10 mètres
ALTITUDES EN MÈTRES
0,01
0,05
0,1
0,2
0,5
1
2
5
10
20
30
40
50
60
70
80
90
95
98
99
99,9
99,99
105
110
115
120
125
130
135
140
145
150

Fig 4

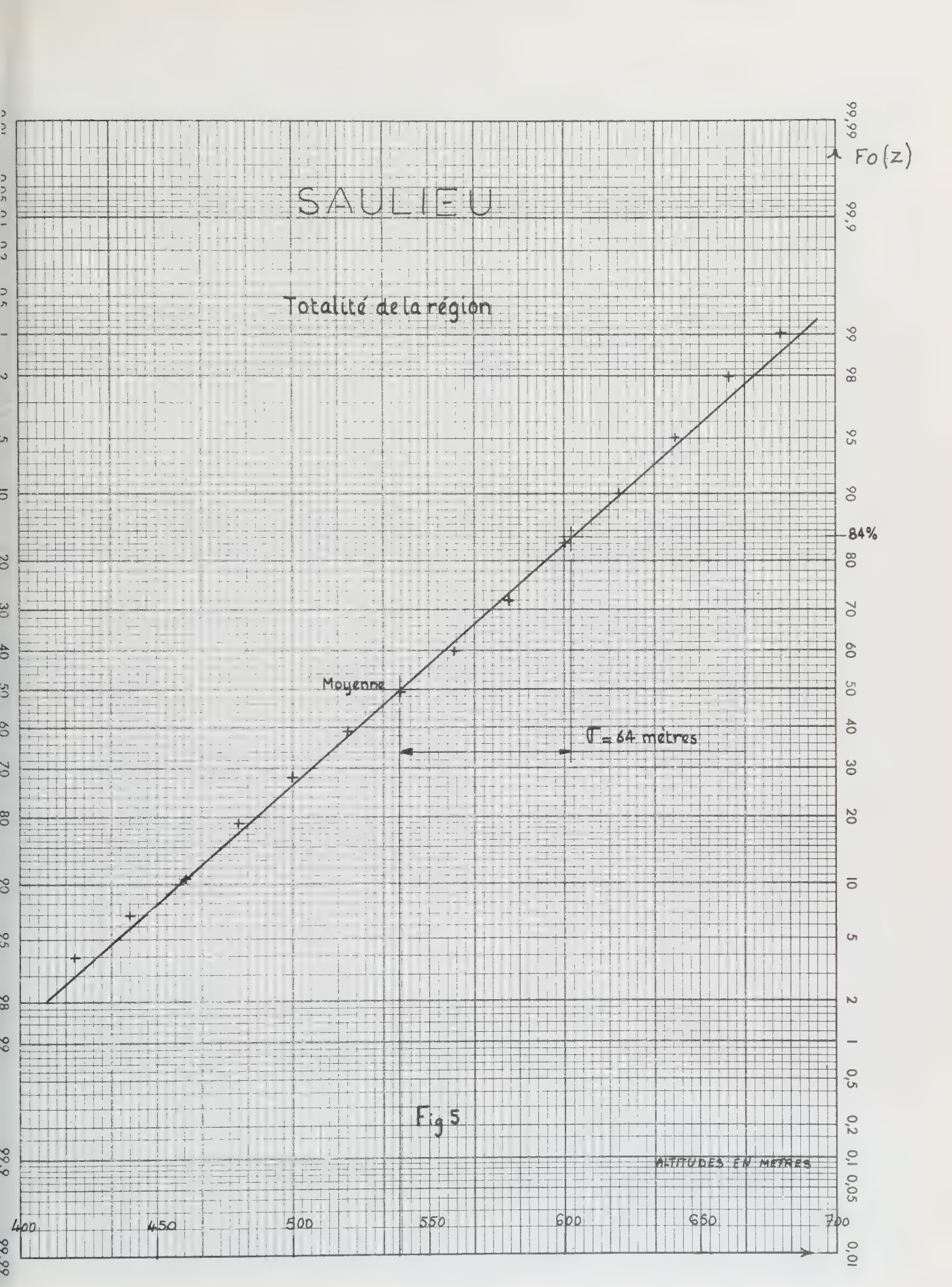

SAULIEU
Totalité de la région
Fo(z)
99,99
99,9
99
98
95
90
84%
80
70
60
50
40
30
20
10
5
2
1
0,5
0,2
0,1
0,05
0,01
Moyenne
Γ = 64 mètres
ALTITUDES EN METRES
400
450
500
550
600
650
700

Fig 5

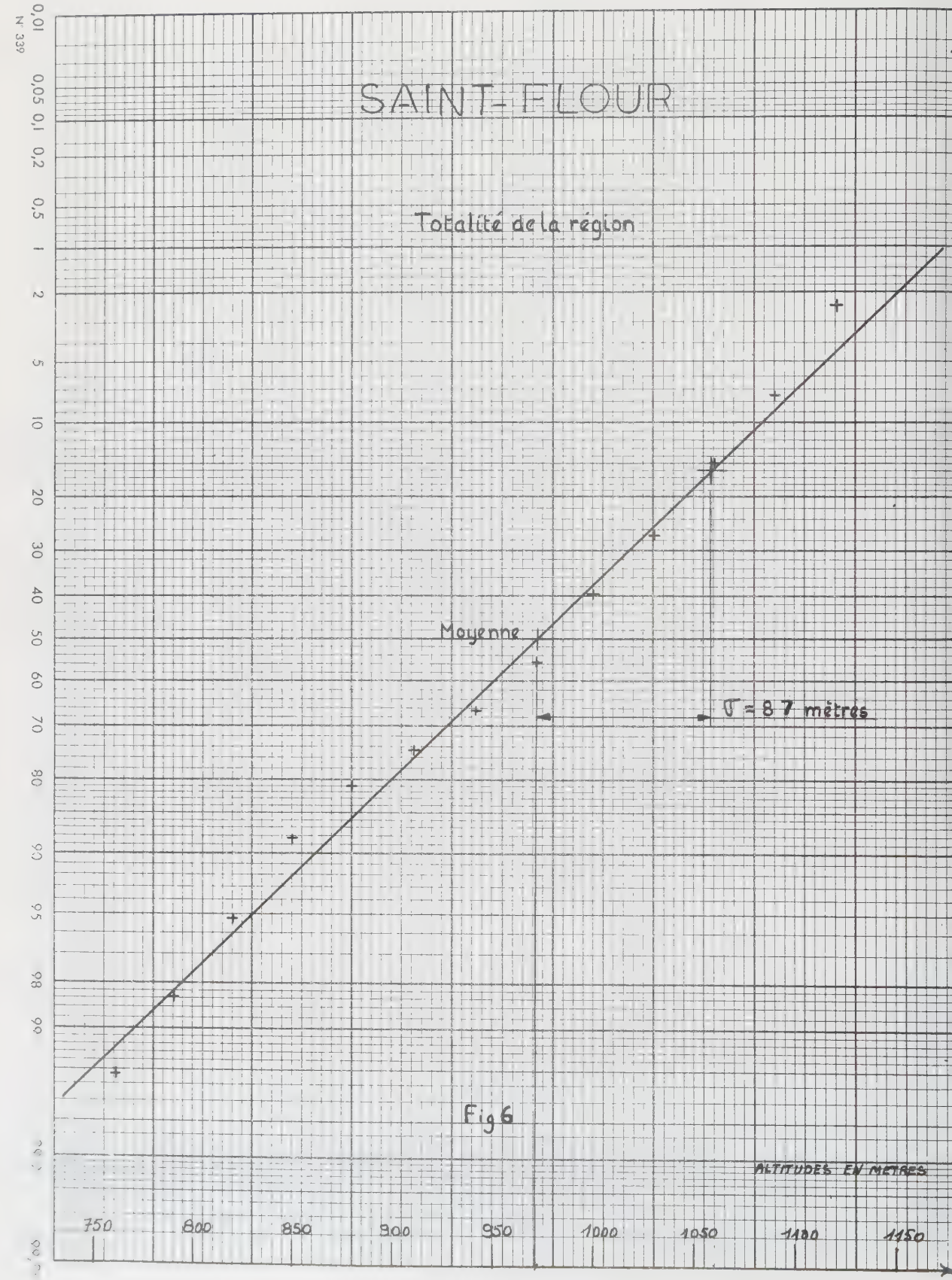

SAINT-FLOUR
Totalité de la région
Moyenne
σ = 87 mètres
ALTITUDES EN MÈTRES
0,01 0,05 0,1 0,2 0,5 1 2 5 10 20 30 40 50 60 70 80 90 95 98 99
750 800 850 900 950 1000 1050 1100 1150

Fig 6

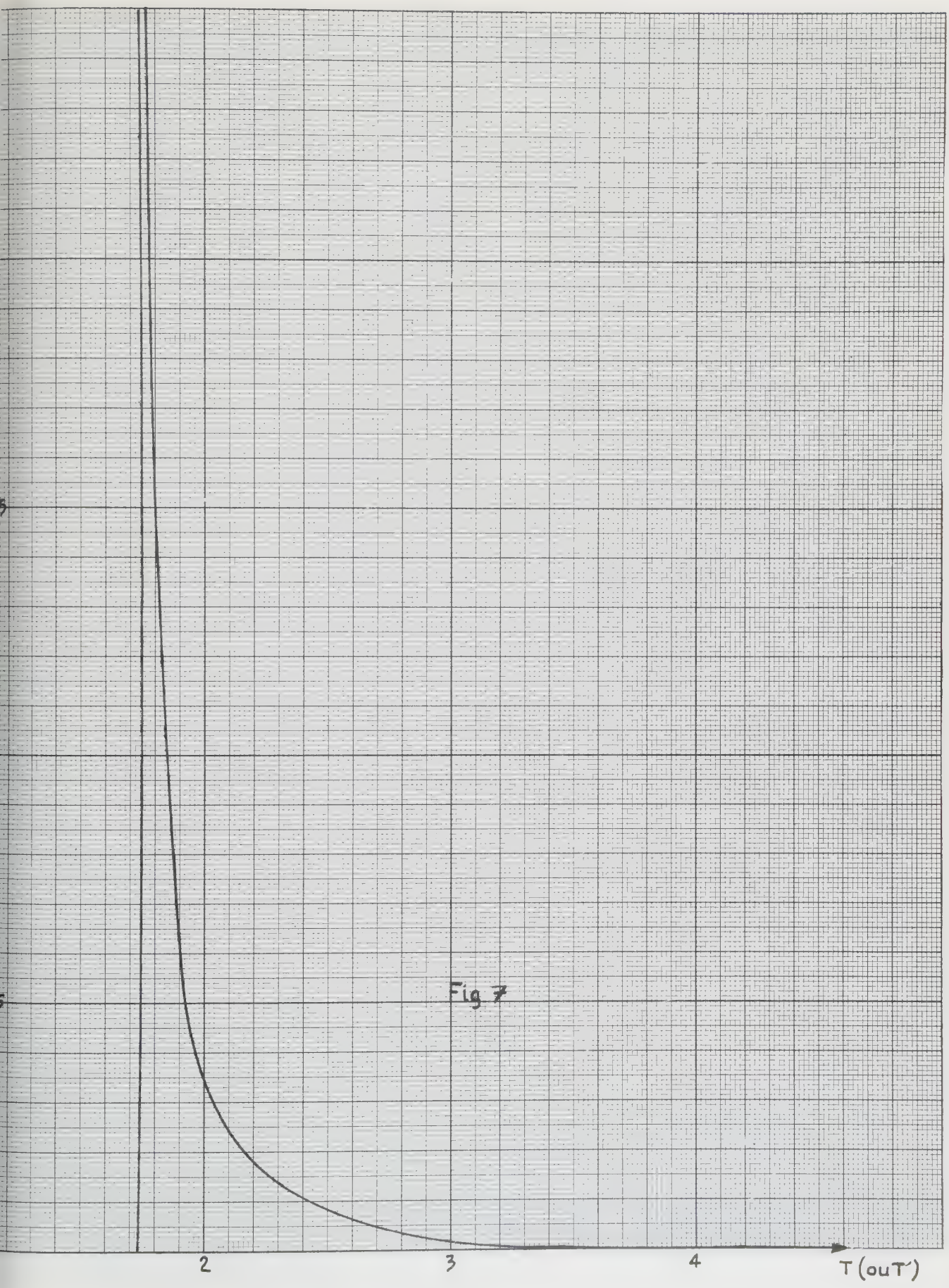


Fig 7

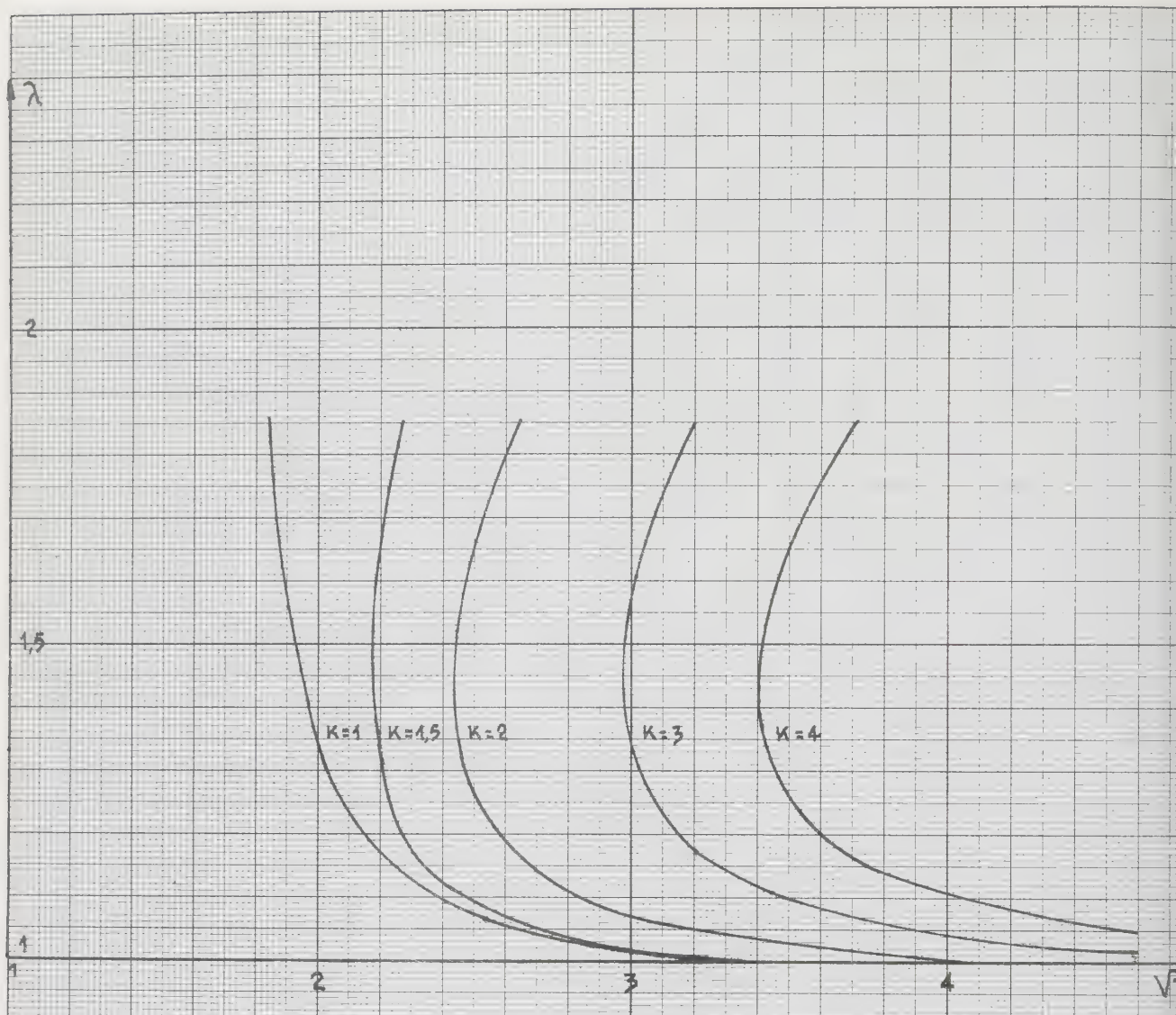


Fig 8

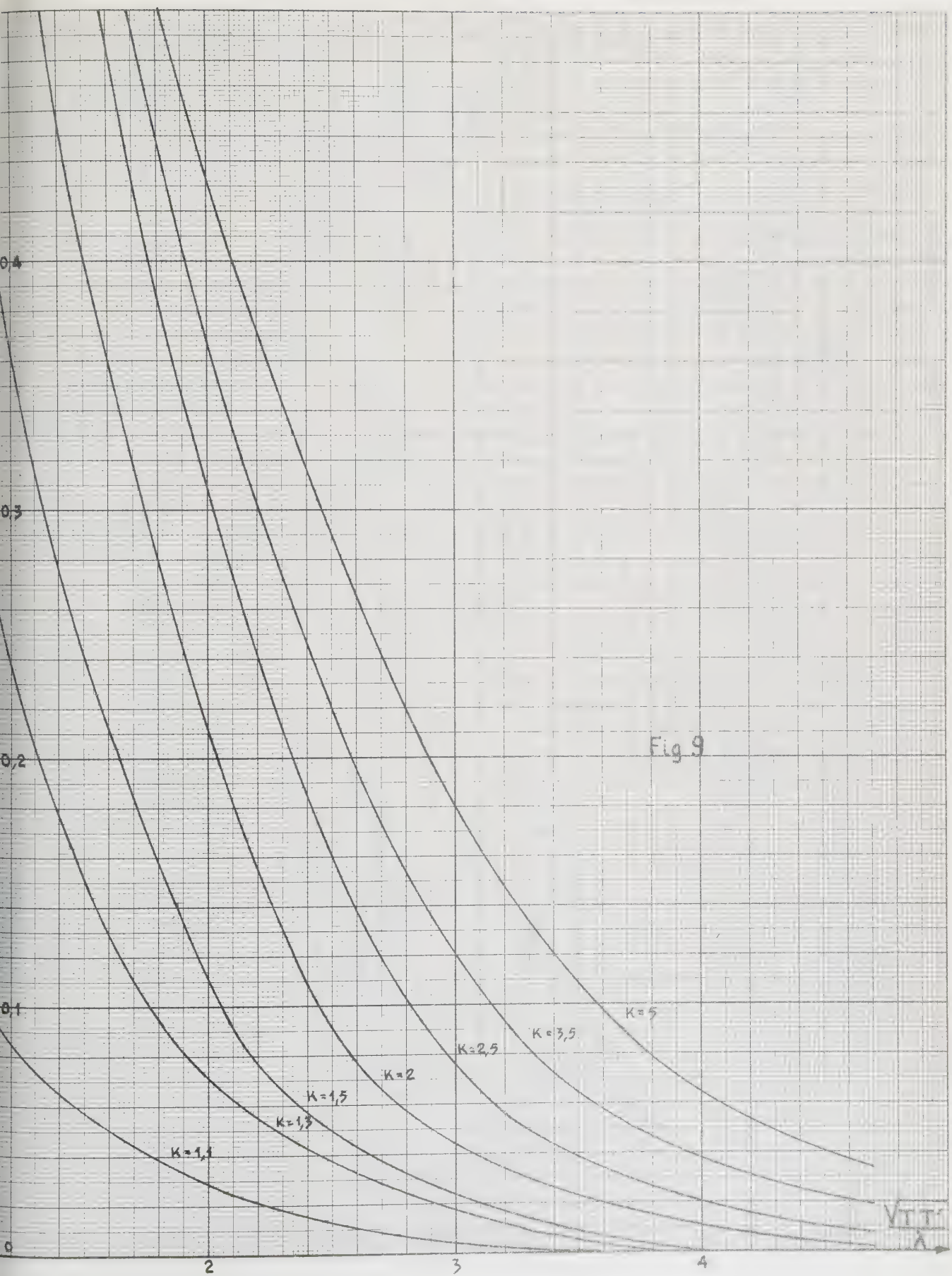
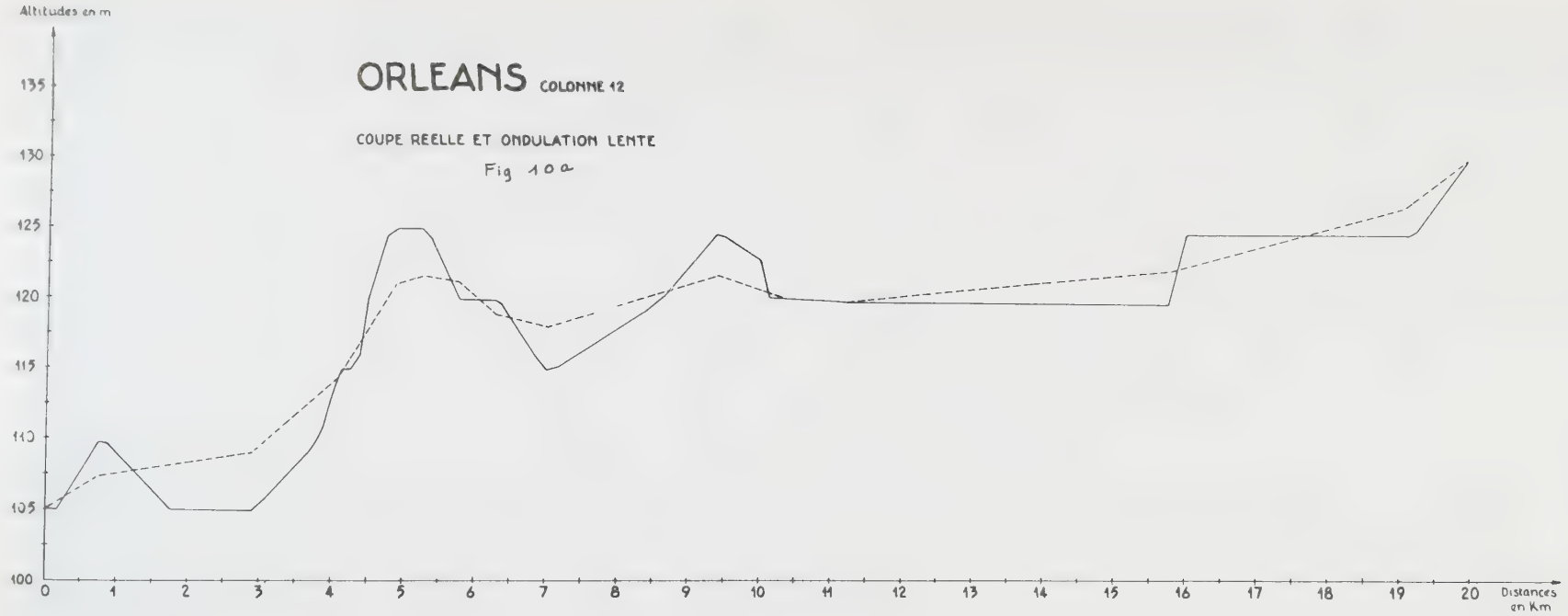
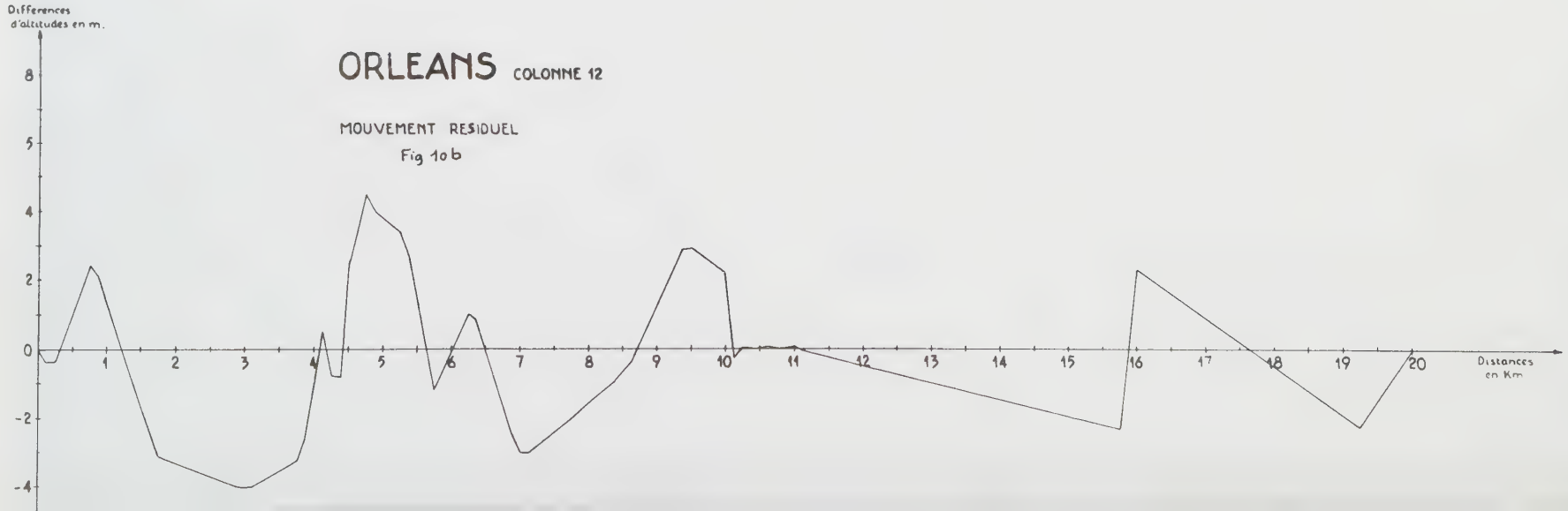


Fig 9

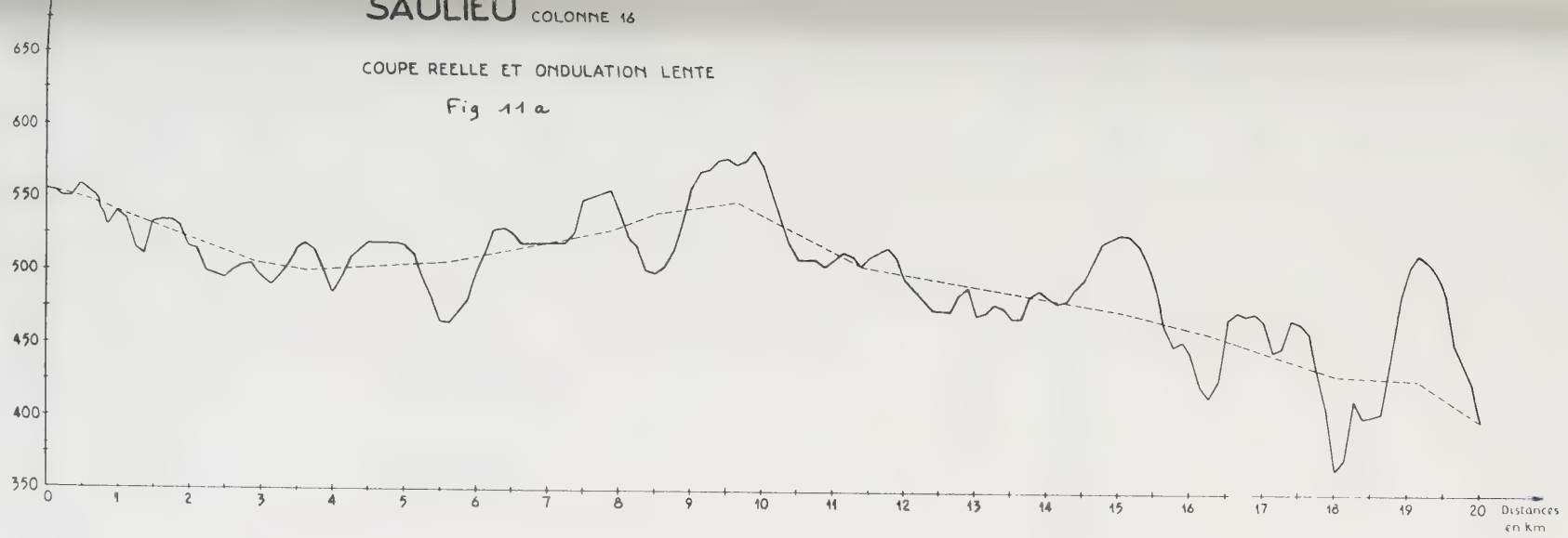

Altitudes en m
ORLEANS COLONNE 12
COUPE REELLE ET ONDULATION LENTE
Fig 10a
135
130
125
120
115
110
105
100
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Distances en Km


Differences d'altitudes en m.
ORLEANS COLONNE 12
MOUVEMENT RESIDUEL
Fig 10b
8
5
4
2
0
-2
-4
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Distances en Km

SAULIEU COLONNE 16

COUPE REELLE ET ONDULATION LENTE

Fig 11 a

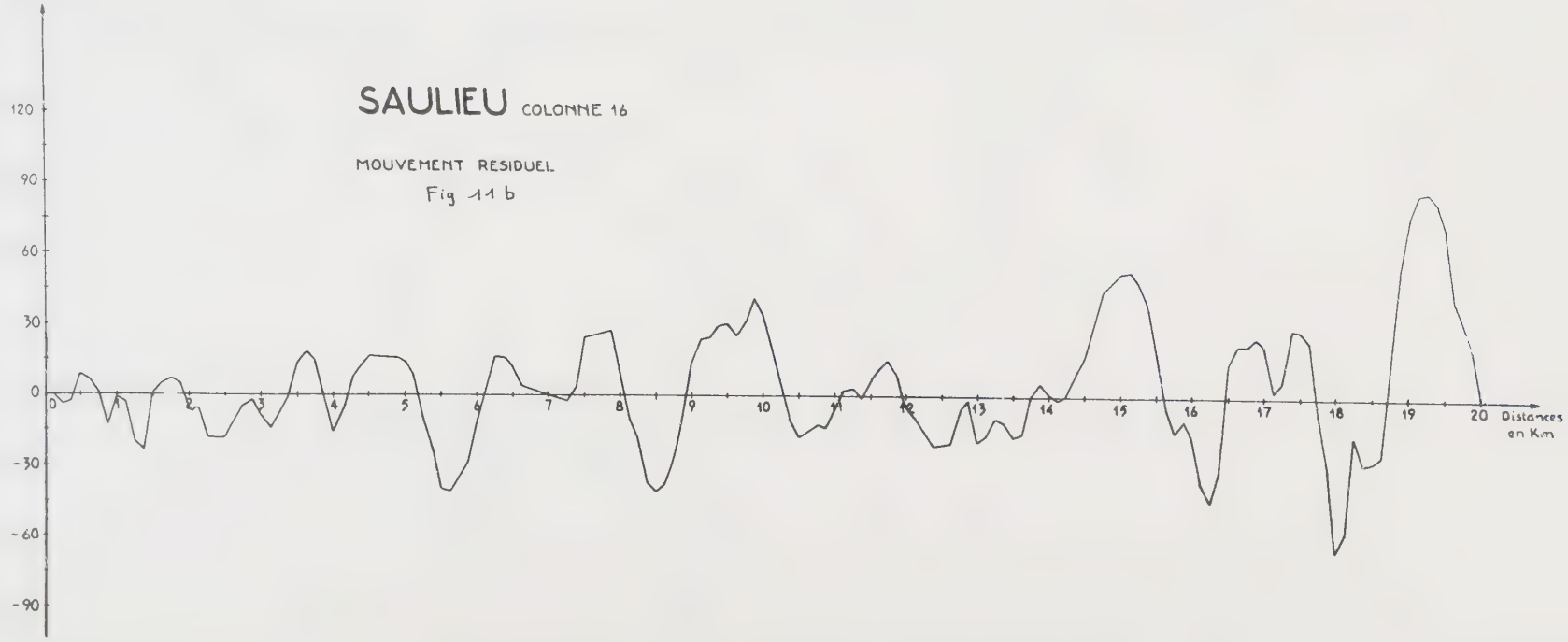


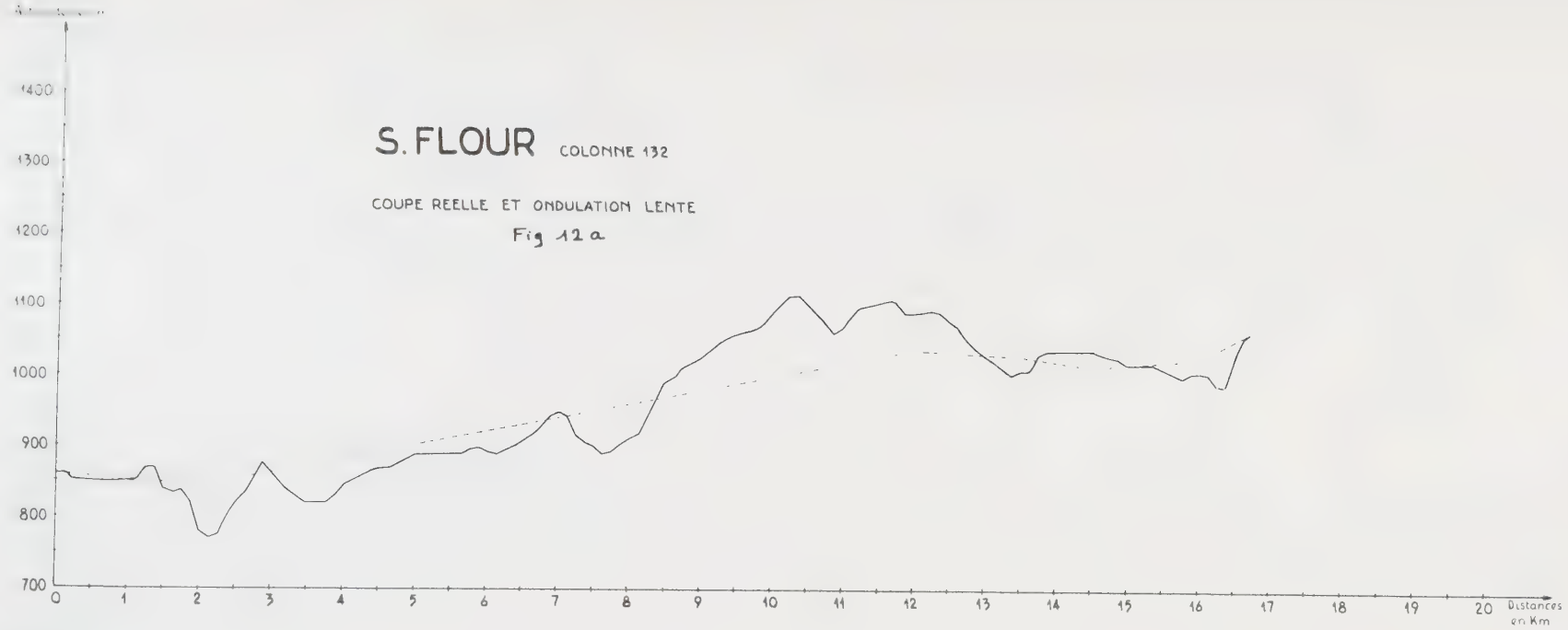
Differences d'altitudes en m

SAULIEU COLONNE 16

MOUVEMENT RESIDUEL

Fig 11 b

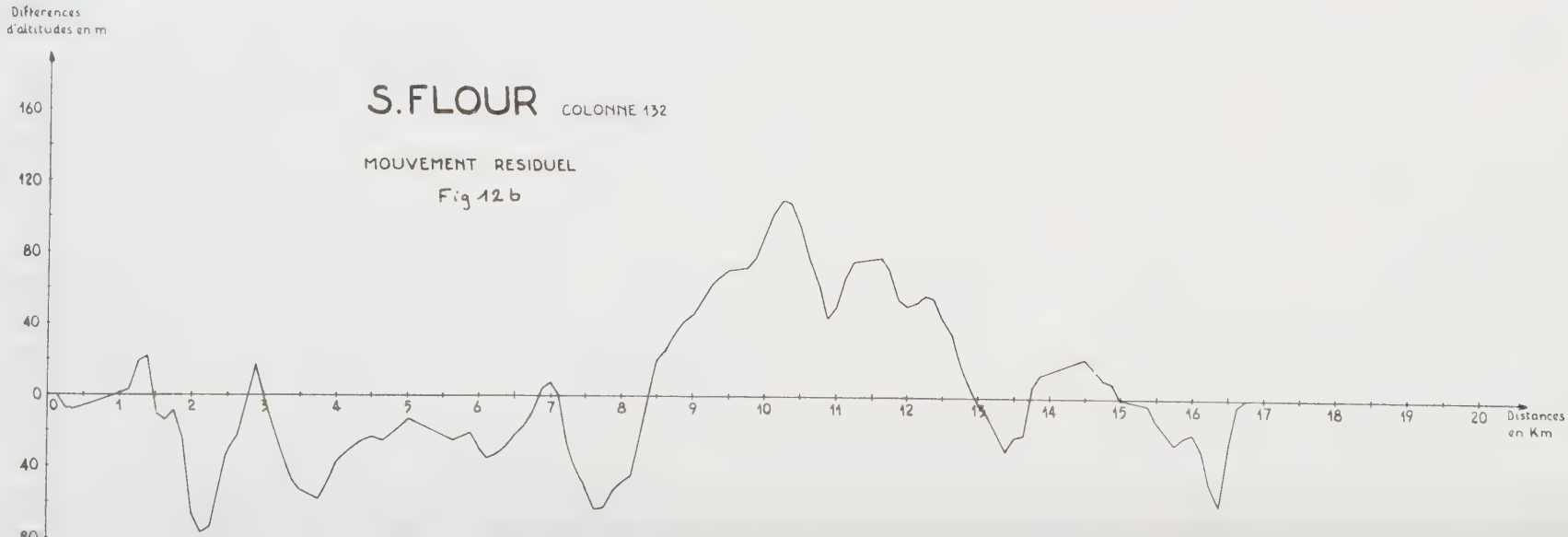




S. FLOUR COLONNE 132

COUPE REELLE ET ONDULATION LENTE

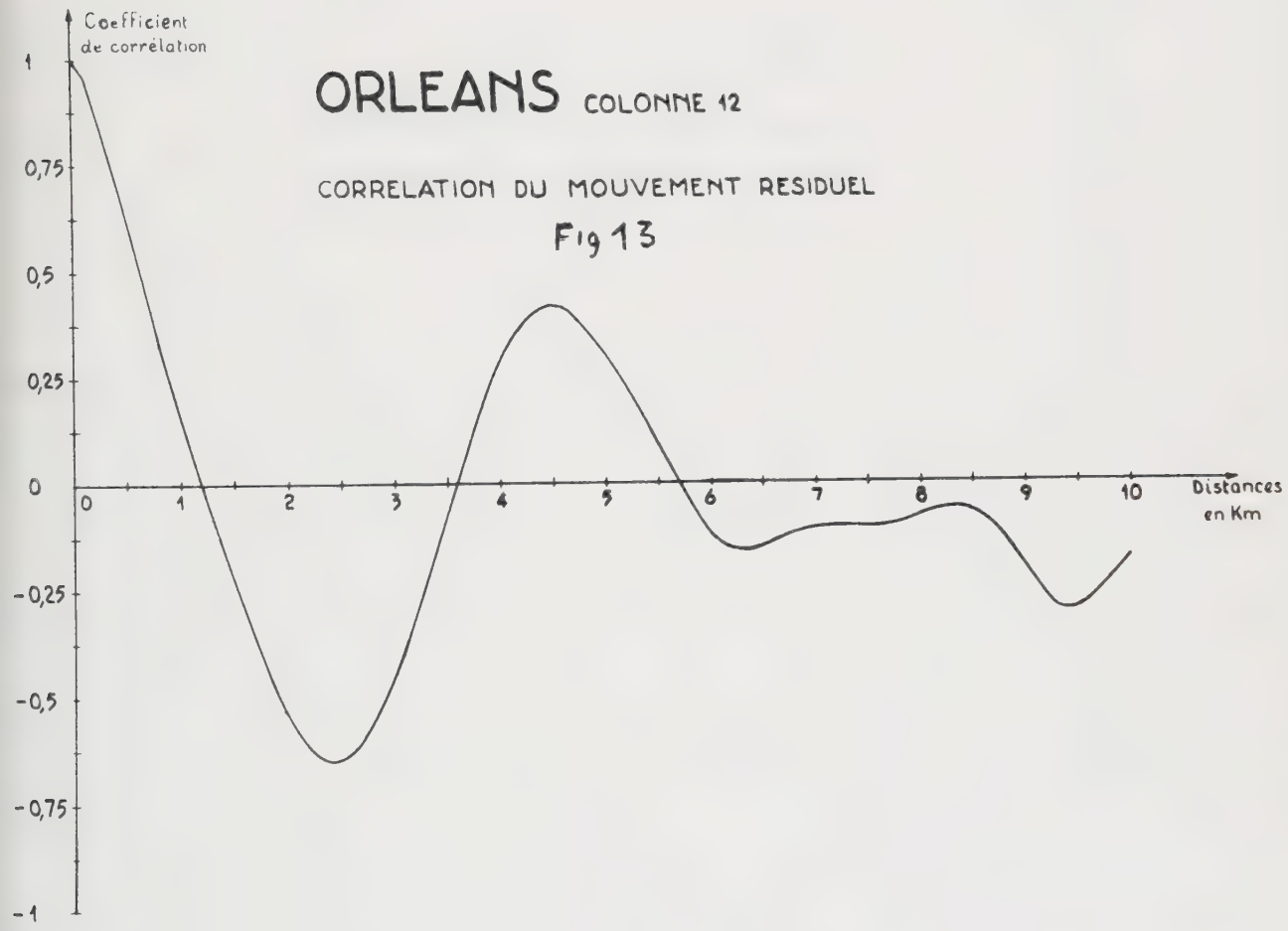
Fig 12 a



S. FLOUR COLONNE 132

MOUVEMENT RESIDUEL

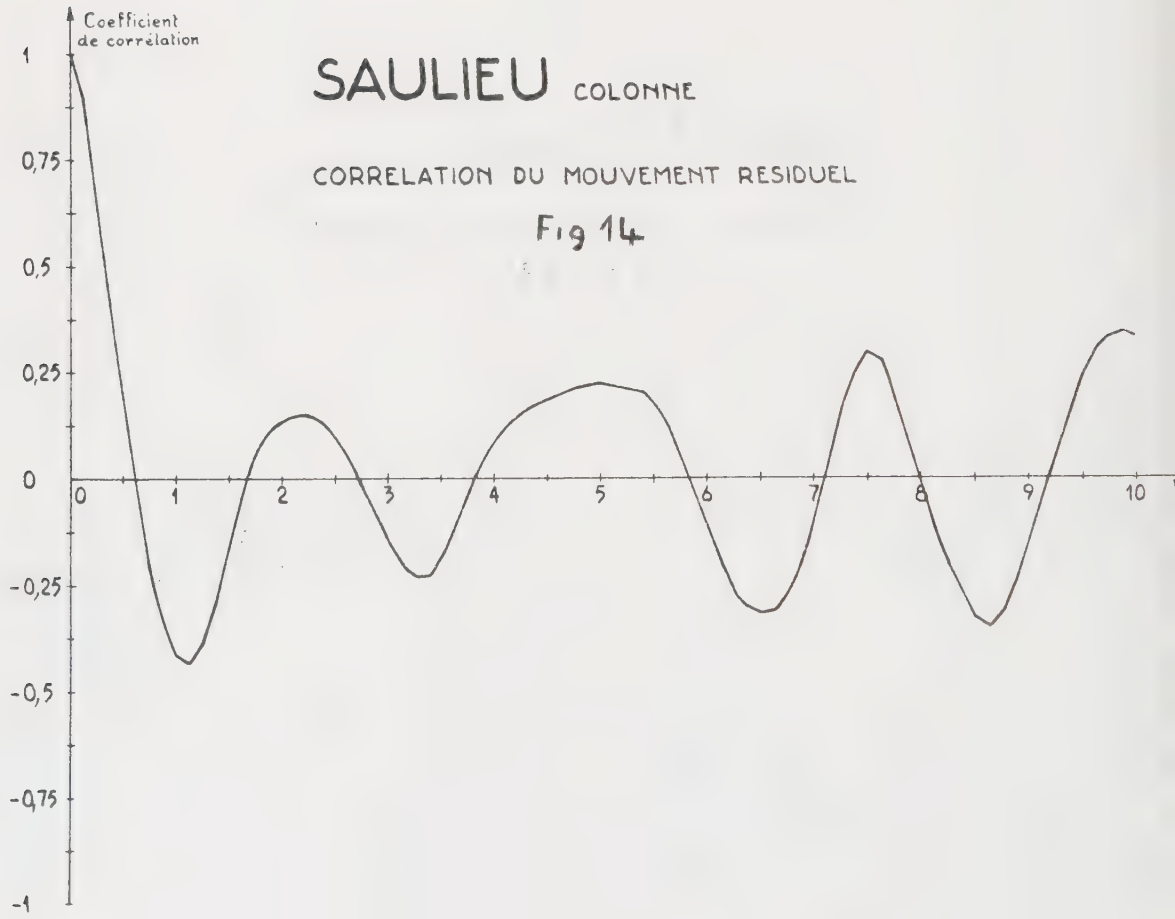
Fig 12 b



ORLEANS COLONNE 12

CORRELATION DU MOUVEMENT RESIDUEL

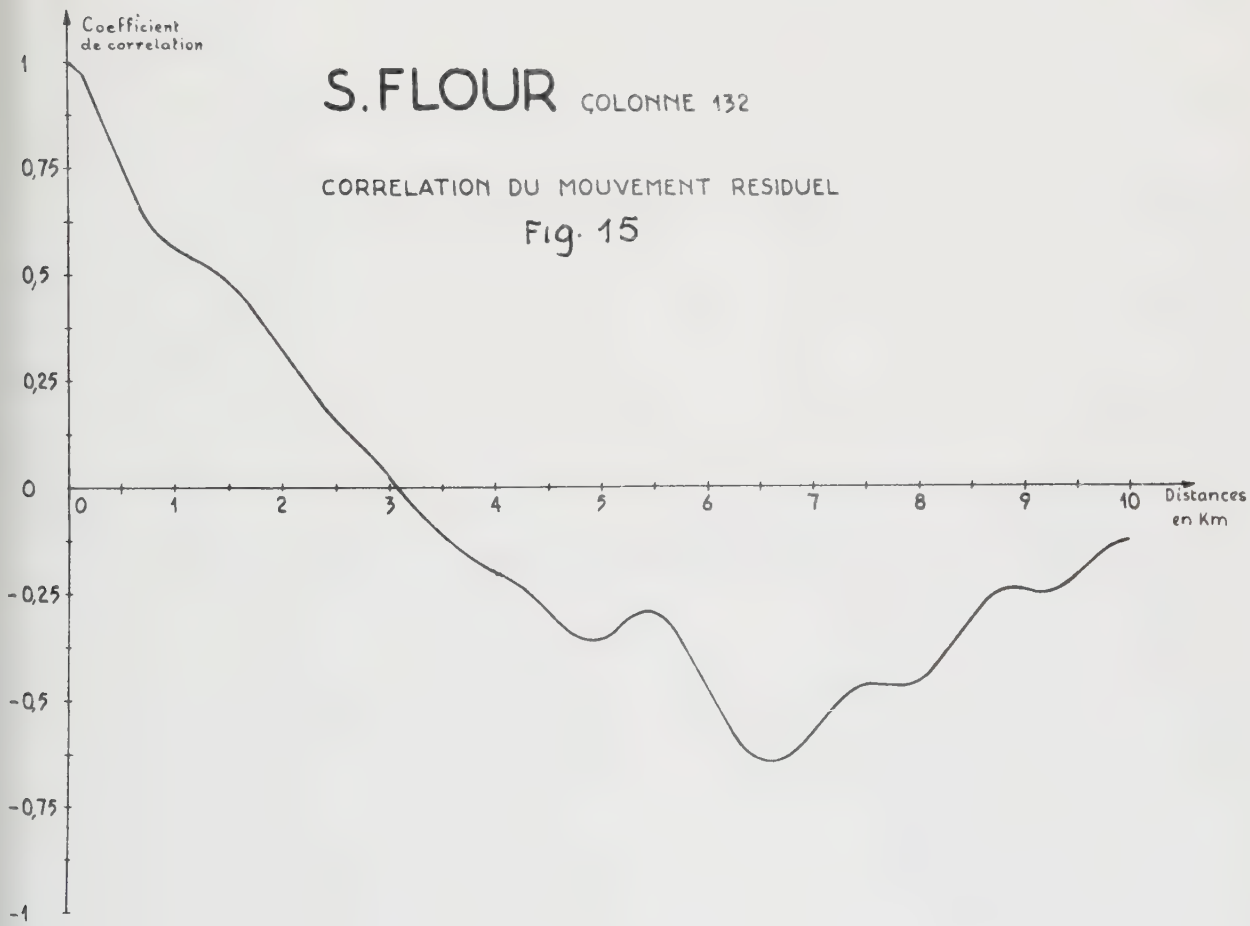
Fig 13



SAULIEU COLONNE

CORRELATION DU MOUVEMENT RESIDUEL

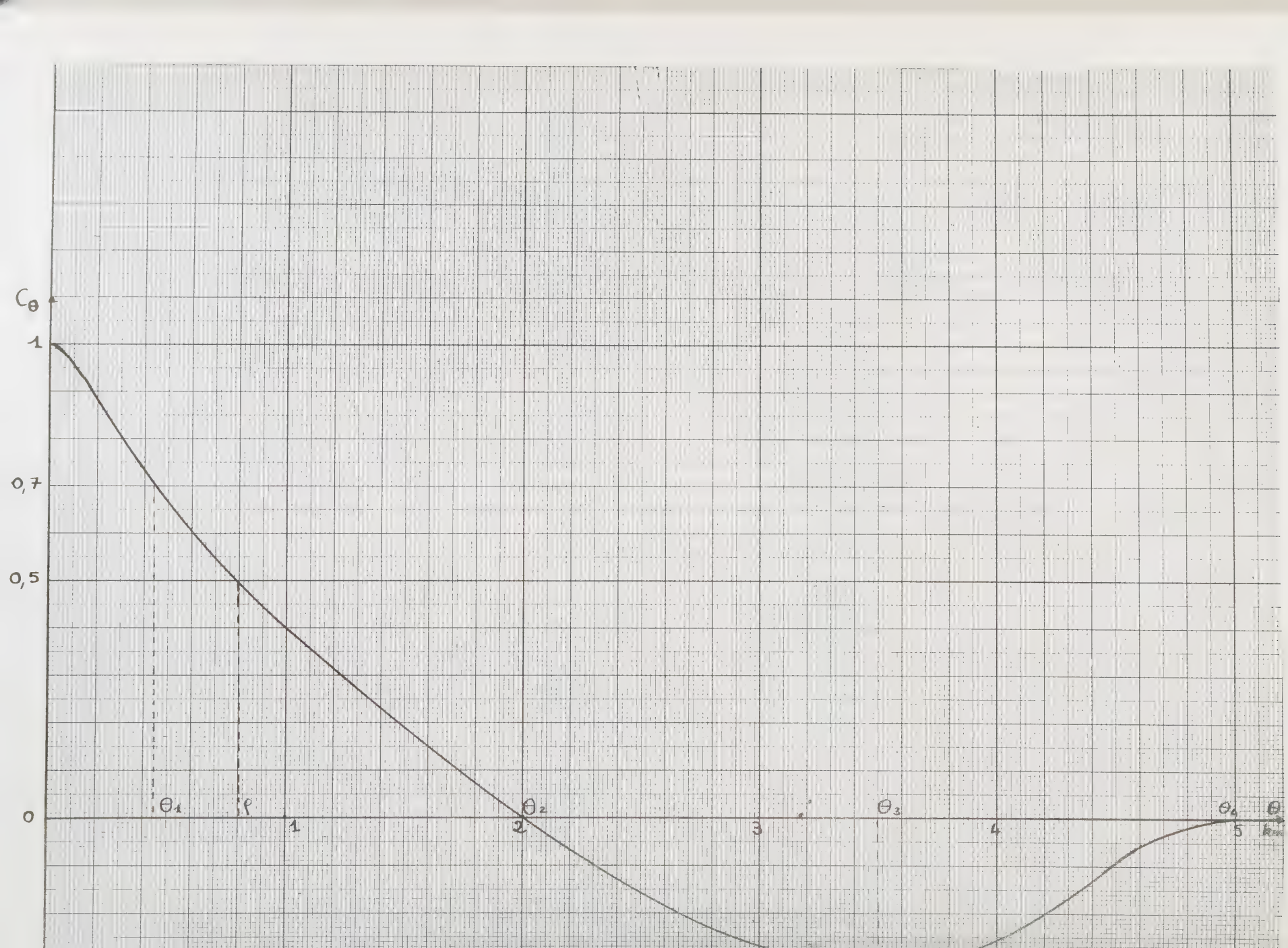
Fig 14



S.FLOUR COLONNE 132

CORRELATION DU MOUVEMENT RESIDUEL

Fig. 15


C_θ
1
0,7
0,5
0
θ_1
ρ
θ_2
θ_3
θ_4
θ
1
2
3
4
5

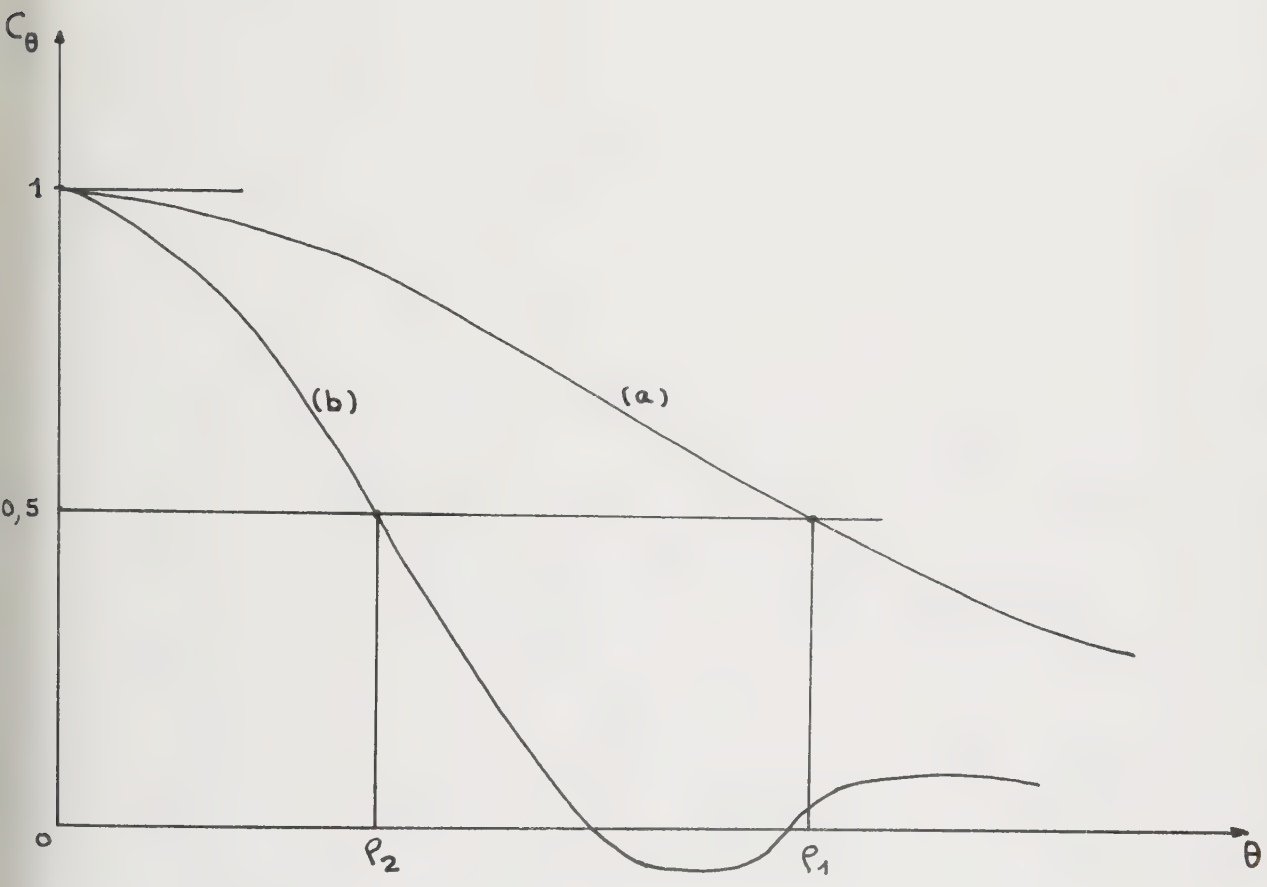


Fig 17

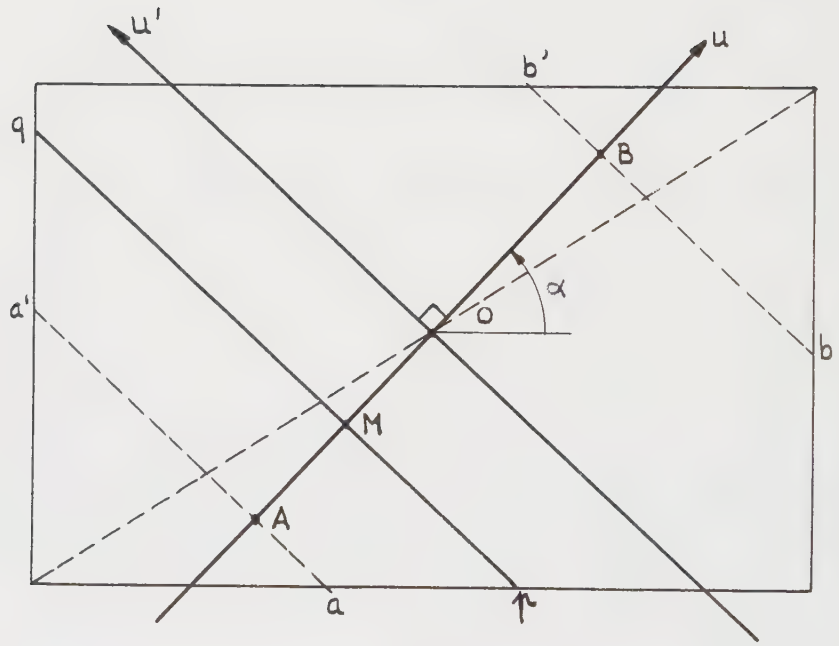
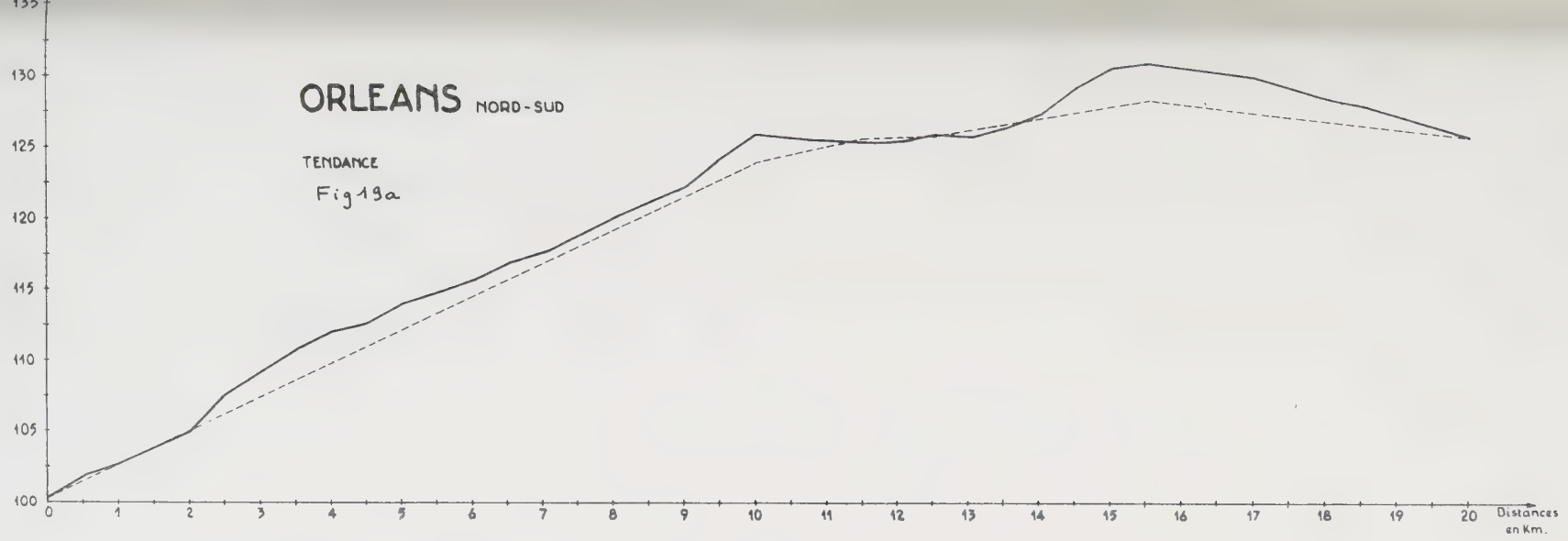
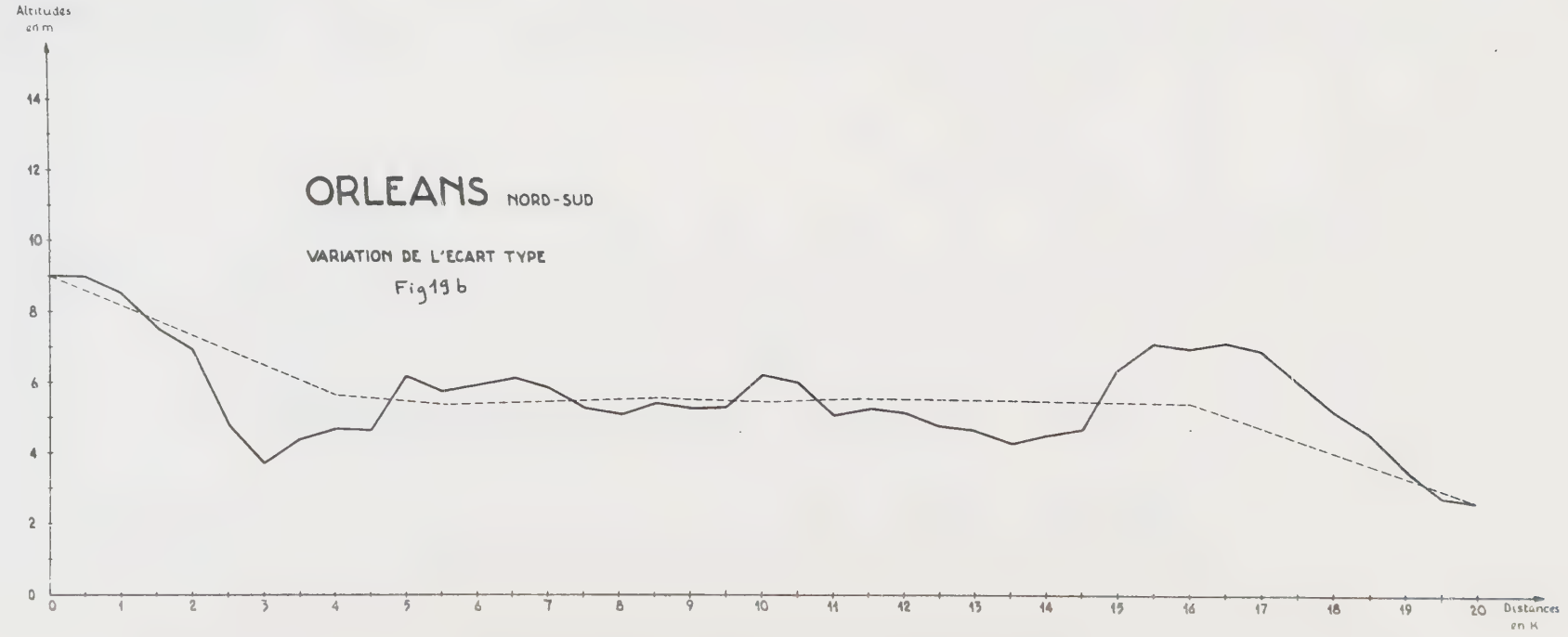
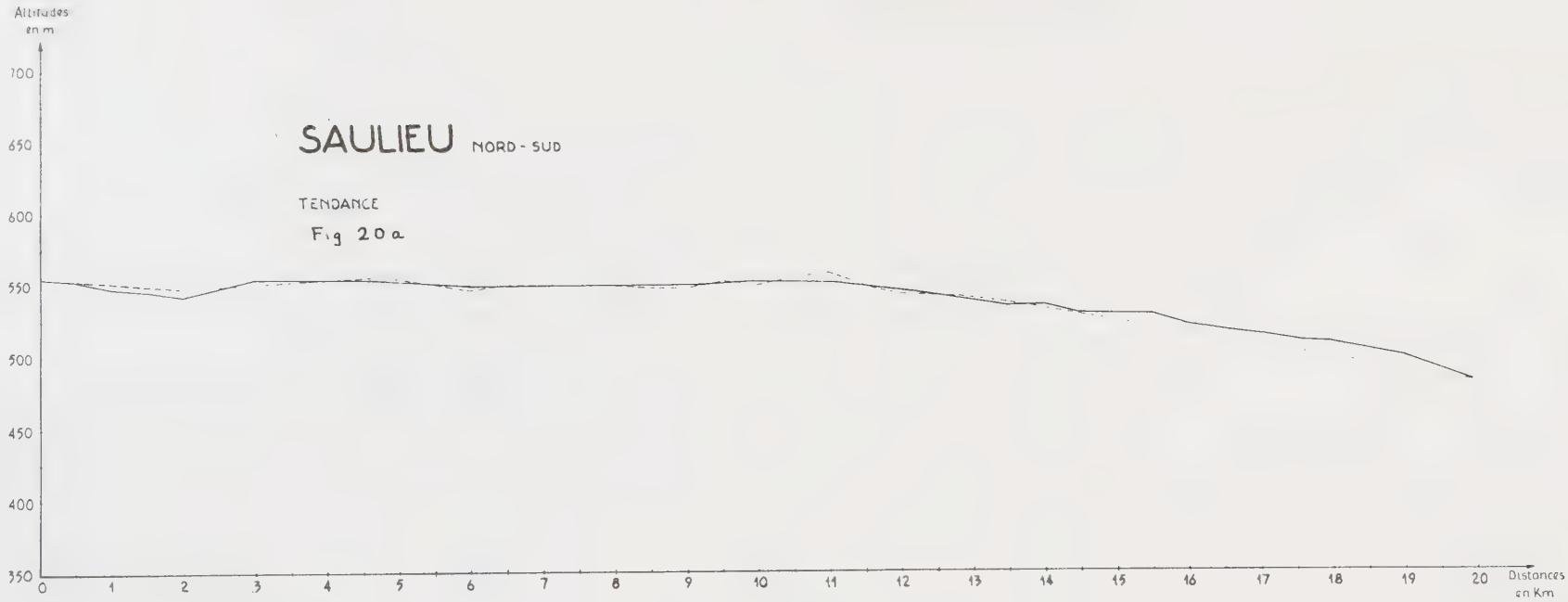


Fig 18


ORLEANS NORD-SUD
TENDANCE
Fig 19a
130
125
120
115
110
105
100
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Distances en Km.


Altitudes en m
ORLEANS NORD-SUD
VARIATION DE L'ECART TYPE
Fig 19 b
14
12
10
8
6
4
2
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Distances en K



SAULIEU NORD - SUD

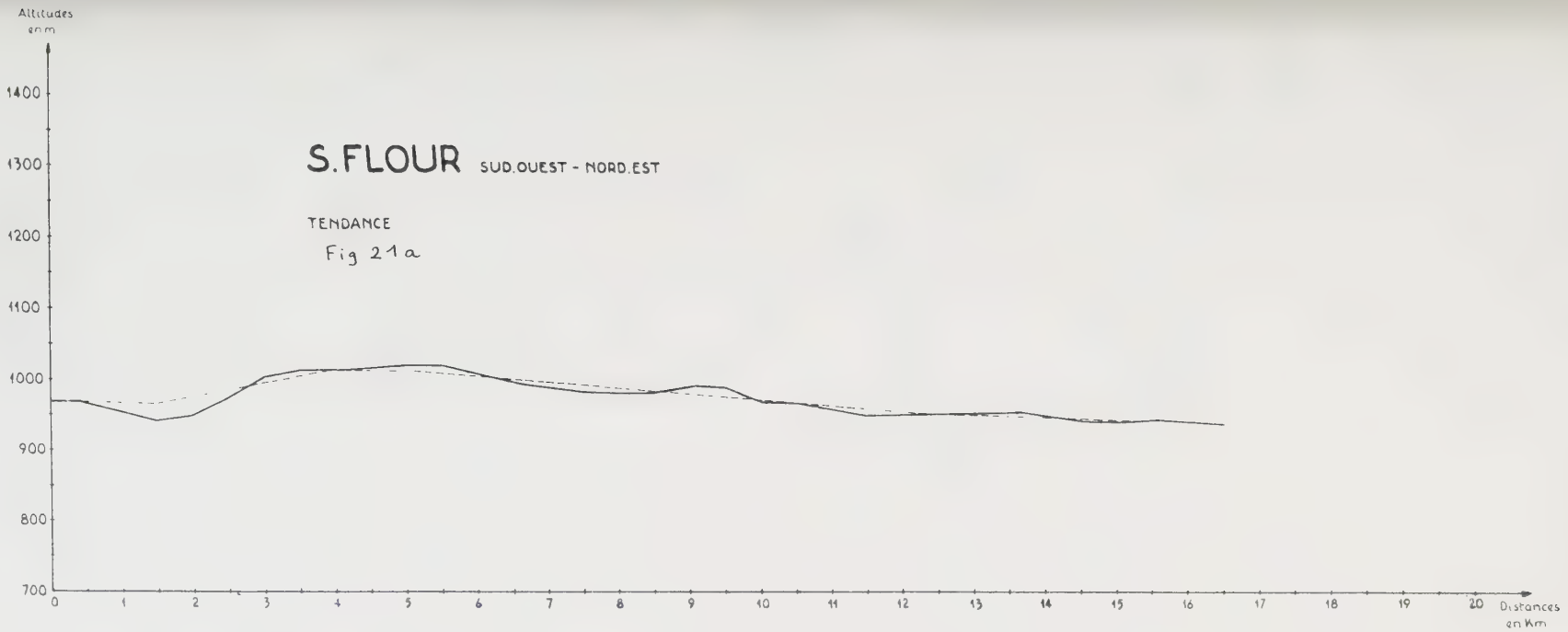
TENDANCE

Fig 20a

SAULIEU NORD - SUD

VARIATION DE L'ECART TYPE

Fig 20b



S.FLOUR SUD.OUEST - NORD.EST

TENDANCE

Fig 21a

S.FLOUR SUD.EST - NORD.OUEST

VARIATION DE L'ECART TYPE

Fig 21b

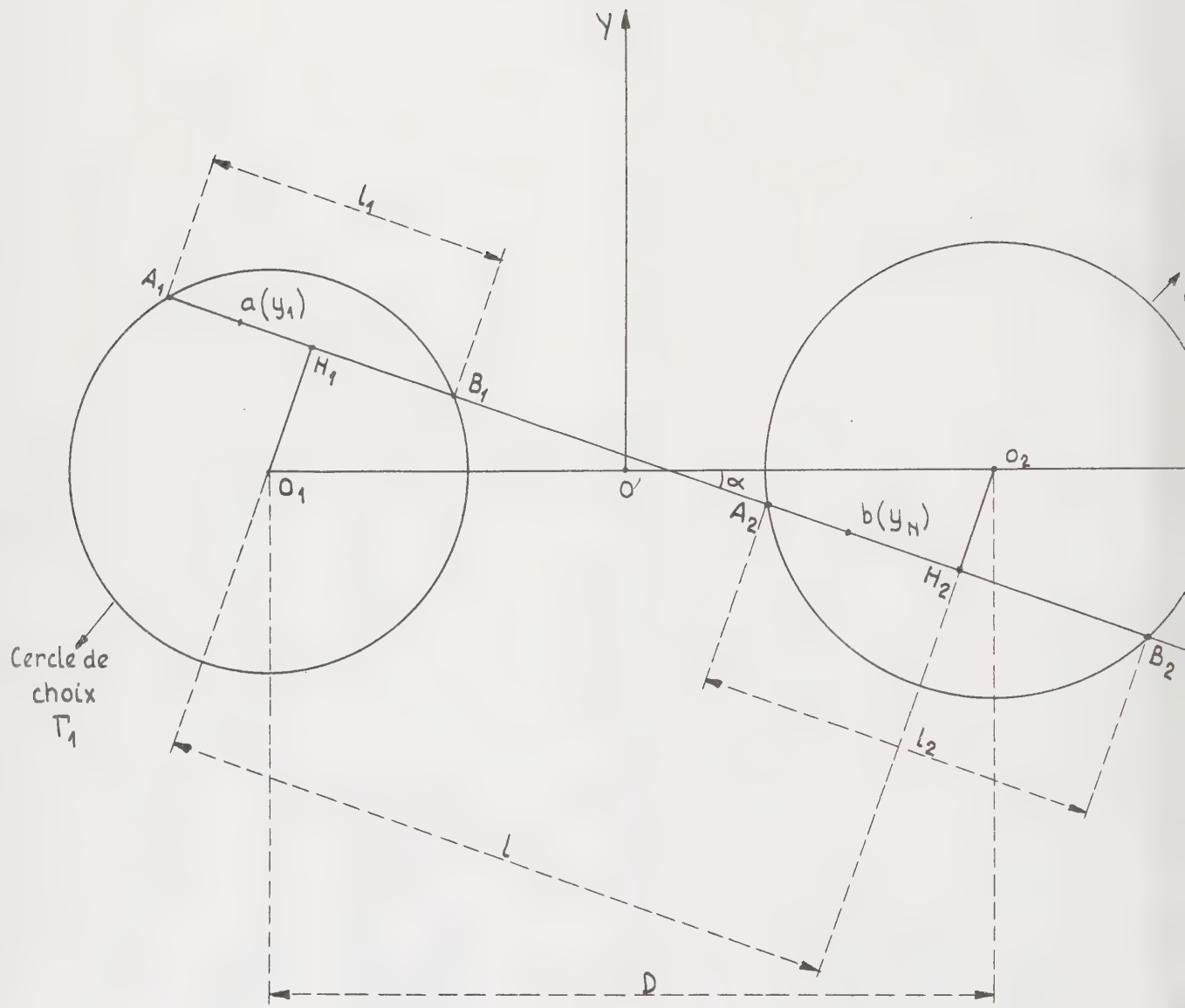

Y
l_1
A_1
$a(y_1)$
H_1
B_1
O_1
O'
O_2
α
A_2
$b(y_H)$
H_2
B_2
l_2
l
D
Cercle de choix Γ_1

Fig 2.2

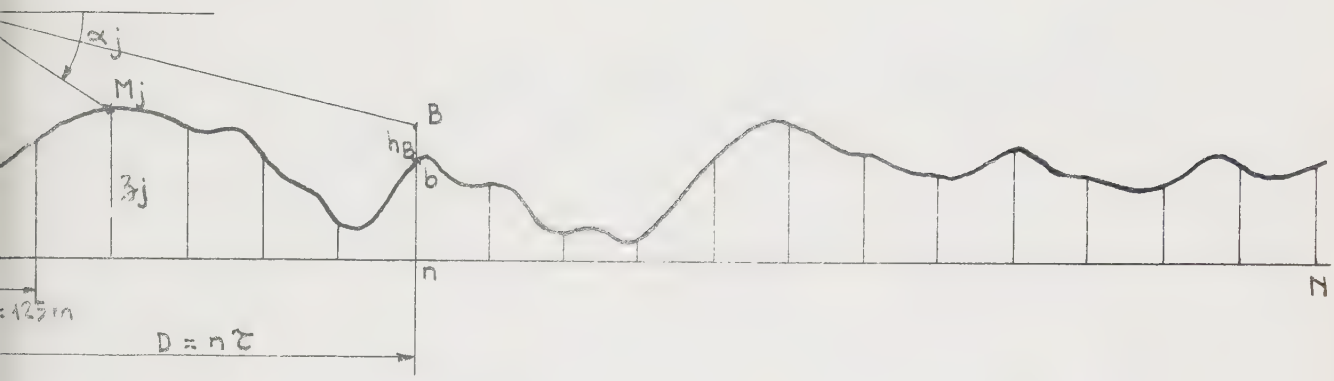
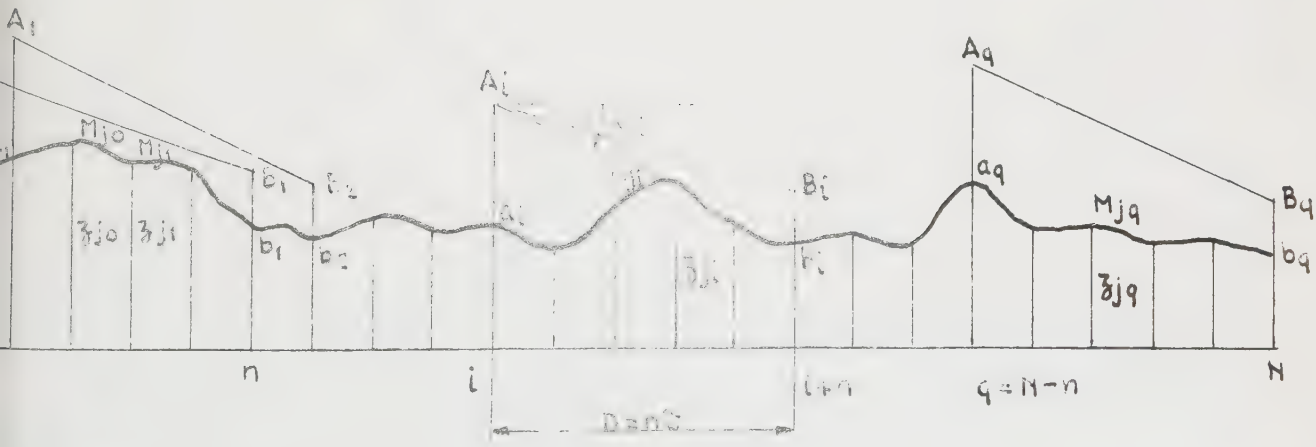


Fig 2 3



avec $z_{j,i+1} = z_{j+1,i}$

Fig 2 4

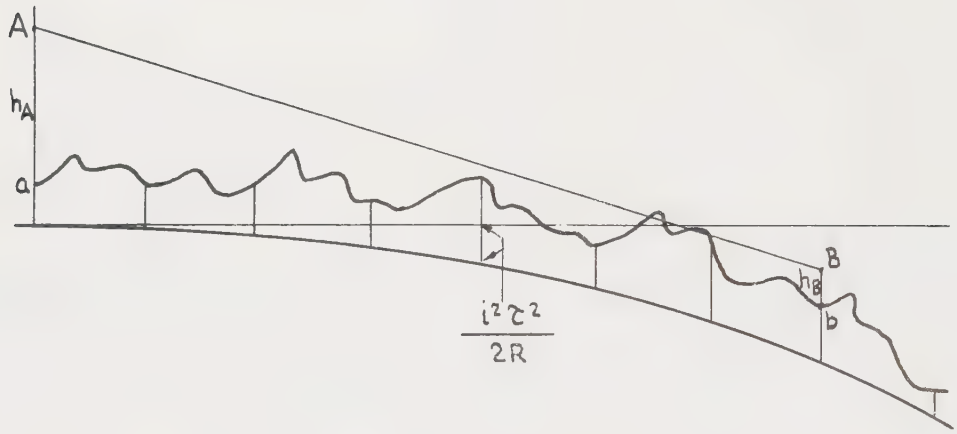

A
h_A
a
B
h_B
b
$\frac{i^2\tau^2}{2R}$

Fig 25

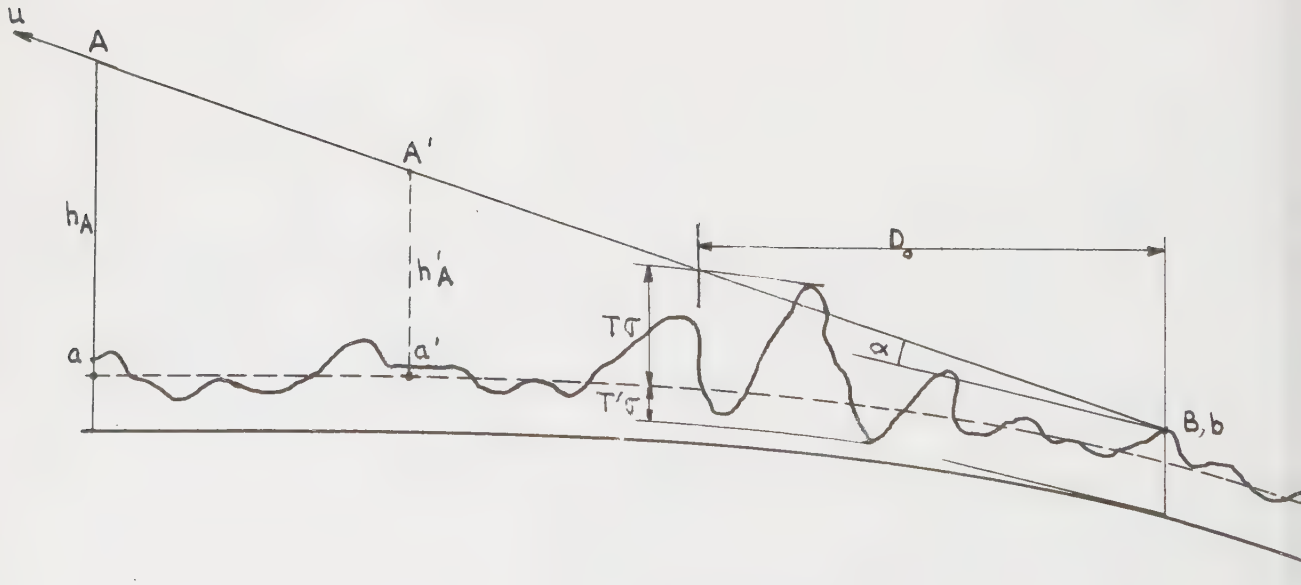

u
A
A'
h_A
h'_A
a
a'
$T\sigma$
$T'\sigma$
D_o
α
B, b

Fig 26

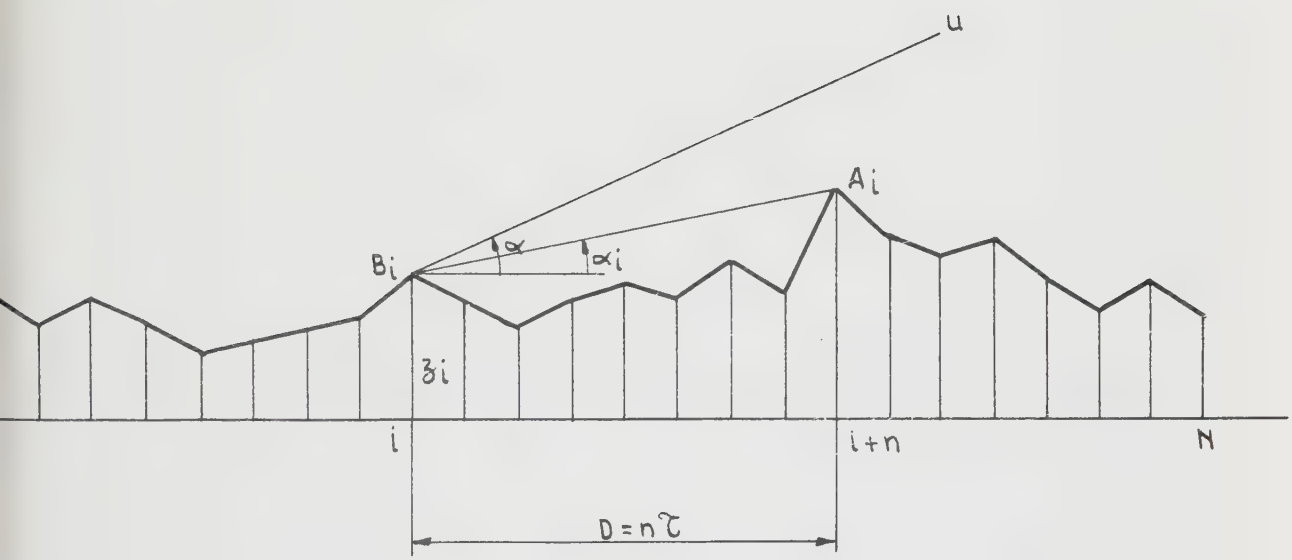


Fig 27

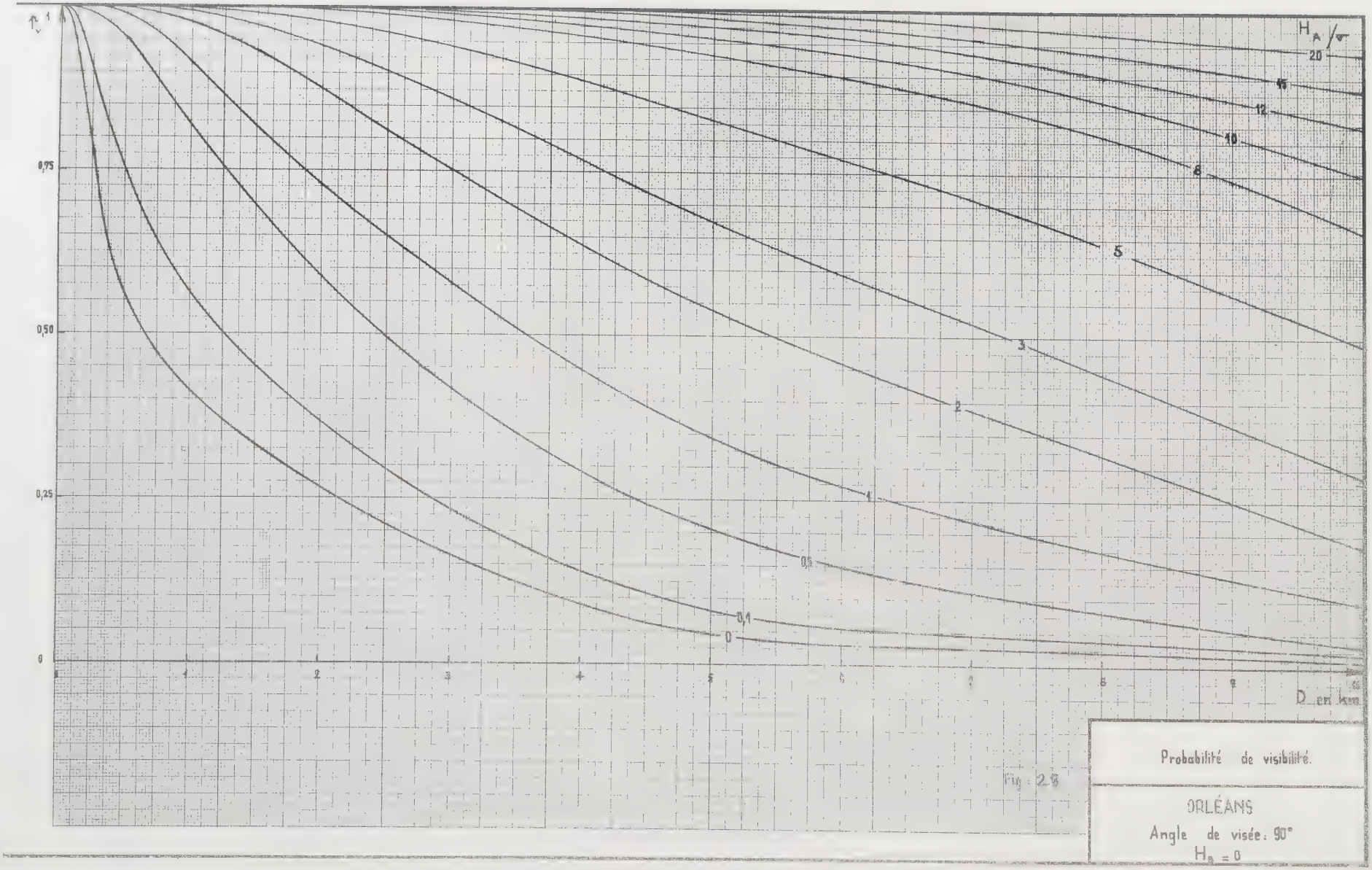


Fig. 2.8

Probabilité de visibilité.

ORLÉANS

Angle de visée : 90°

$H_0 = 0$

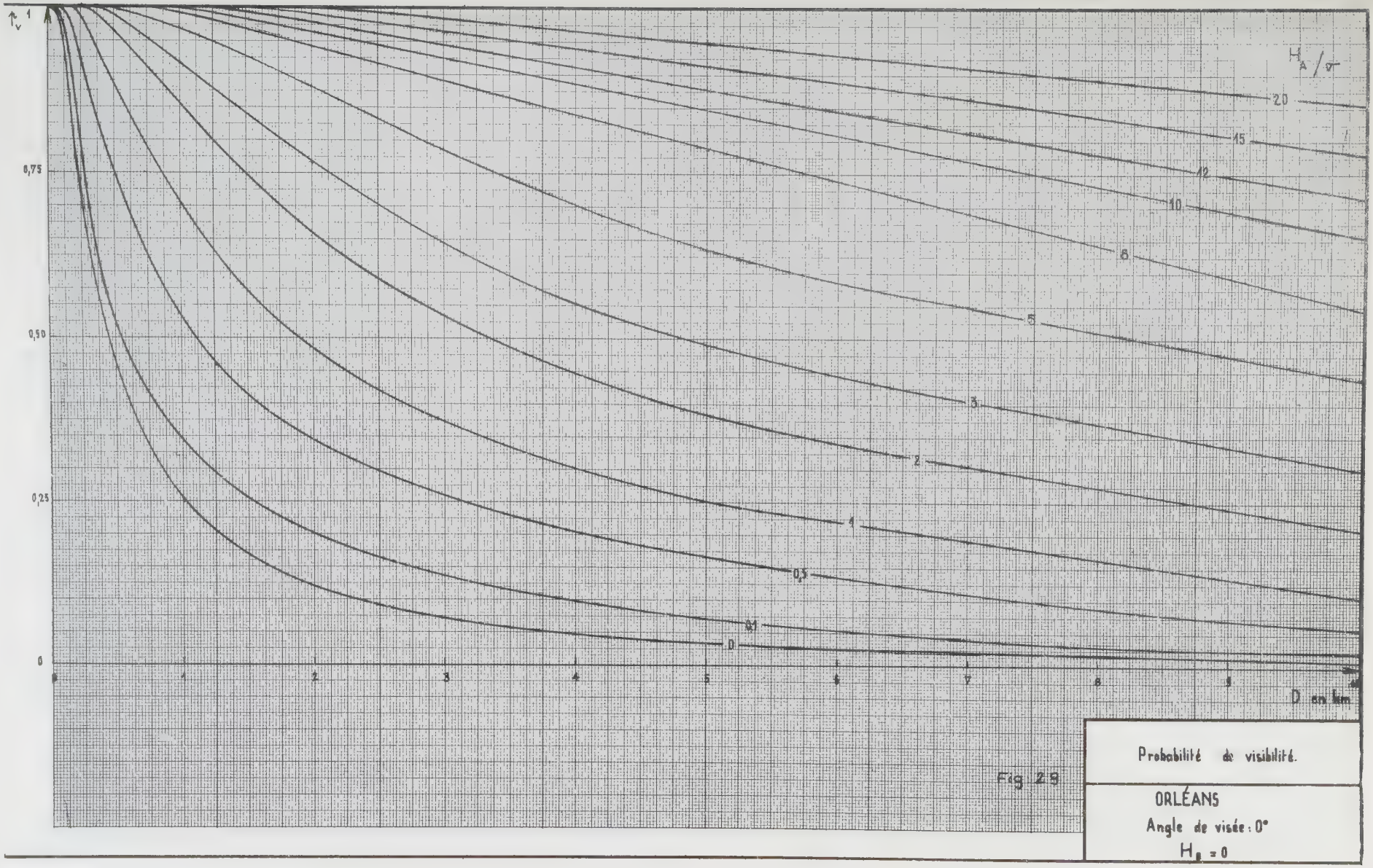


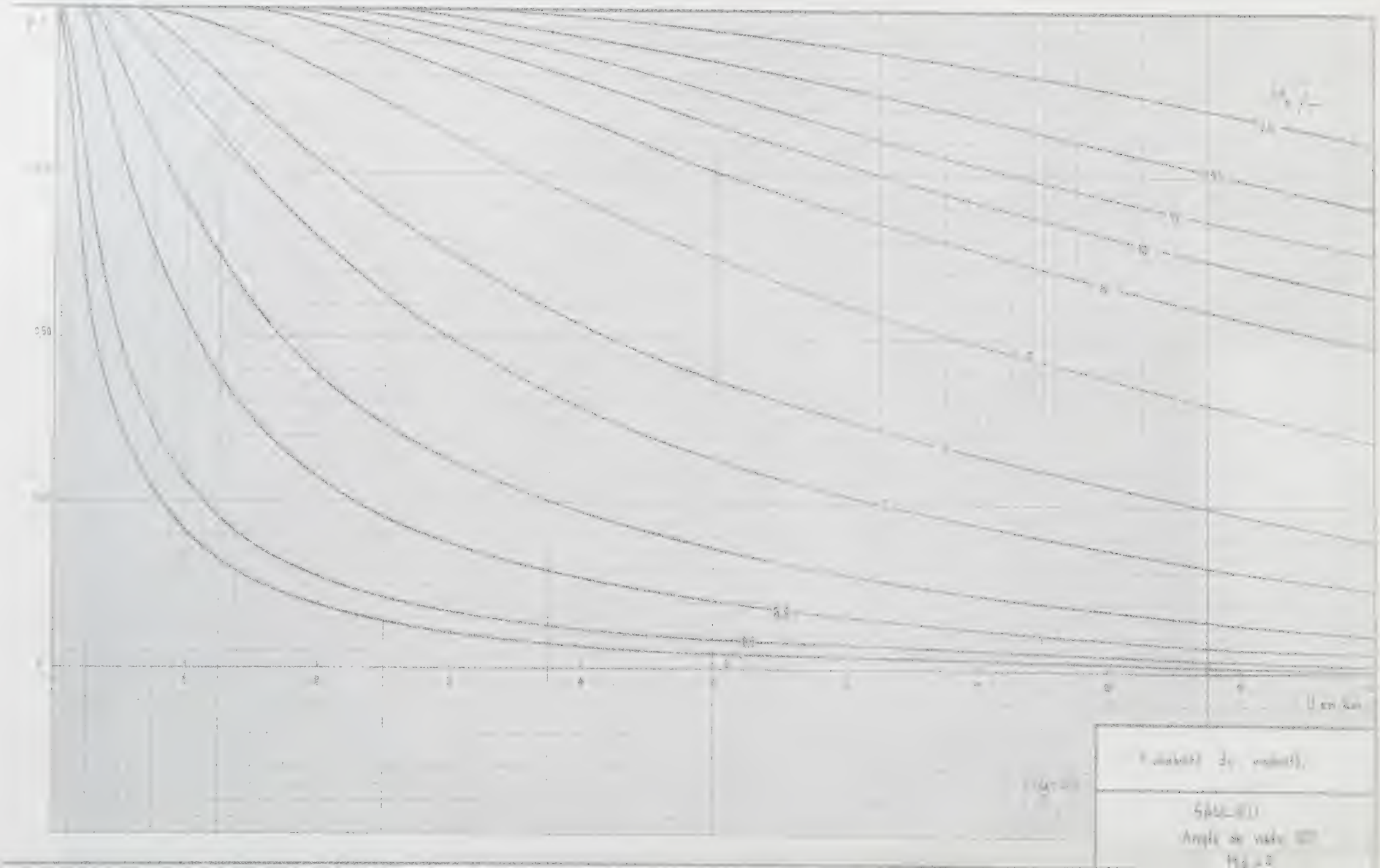
Fig 28

Probabilité de visibilité.

ORLÉANS

Angle de visée : 0°

$H_B = 0$



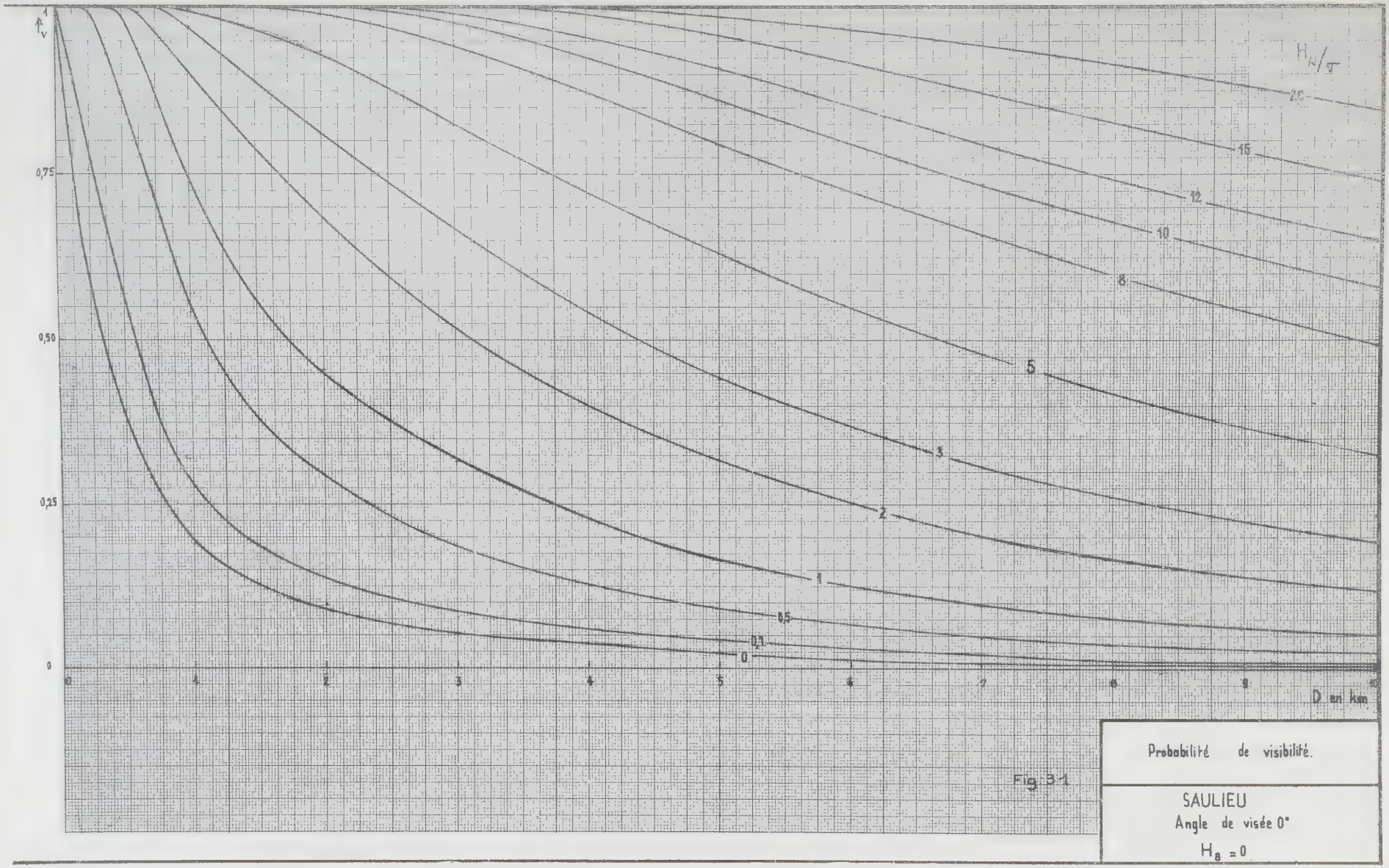


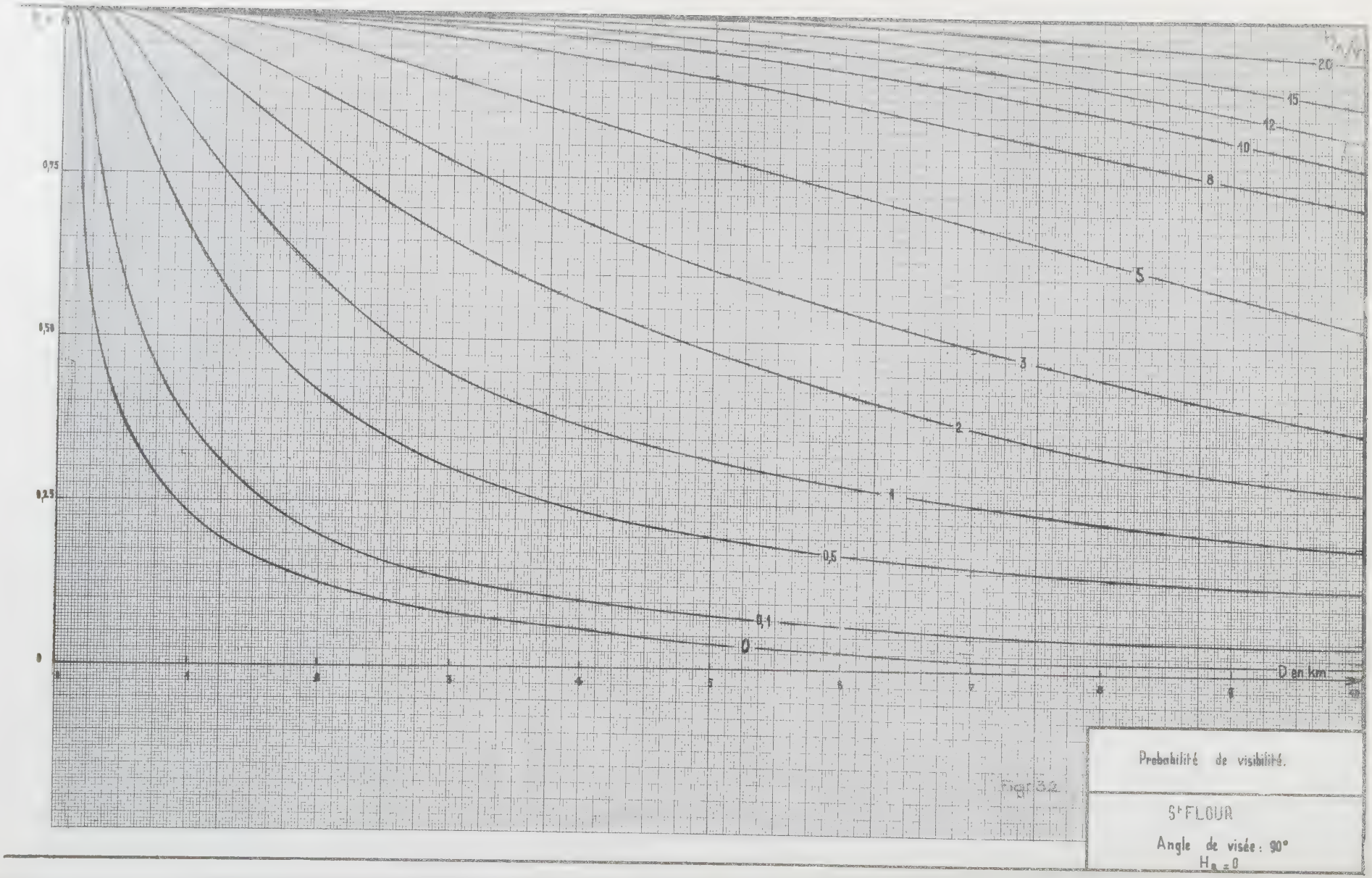
Fig. 3.1

Probabilité de visibilité.

SAULIEU

Angle de visée 0°

$H_a = 0$


P
1
0,75
0,50
0,25
0
20
15
12
10
8
5
3
2
1
0,5
0,1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
D en km
Probabilité de visibilité.
Fig 32
St FLOUR
Angle de visée : 90°
$H_a = 0$

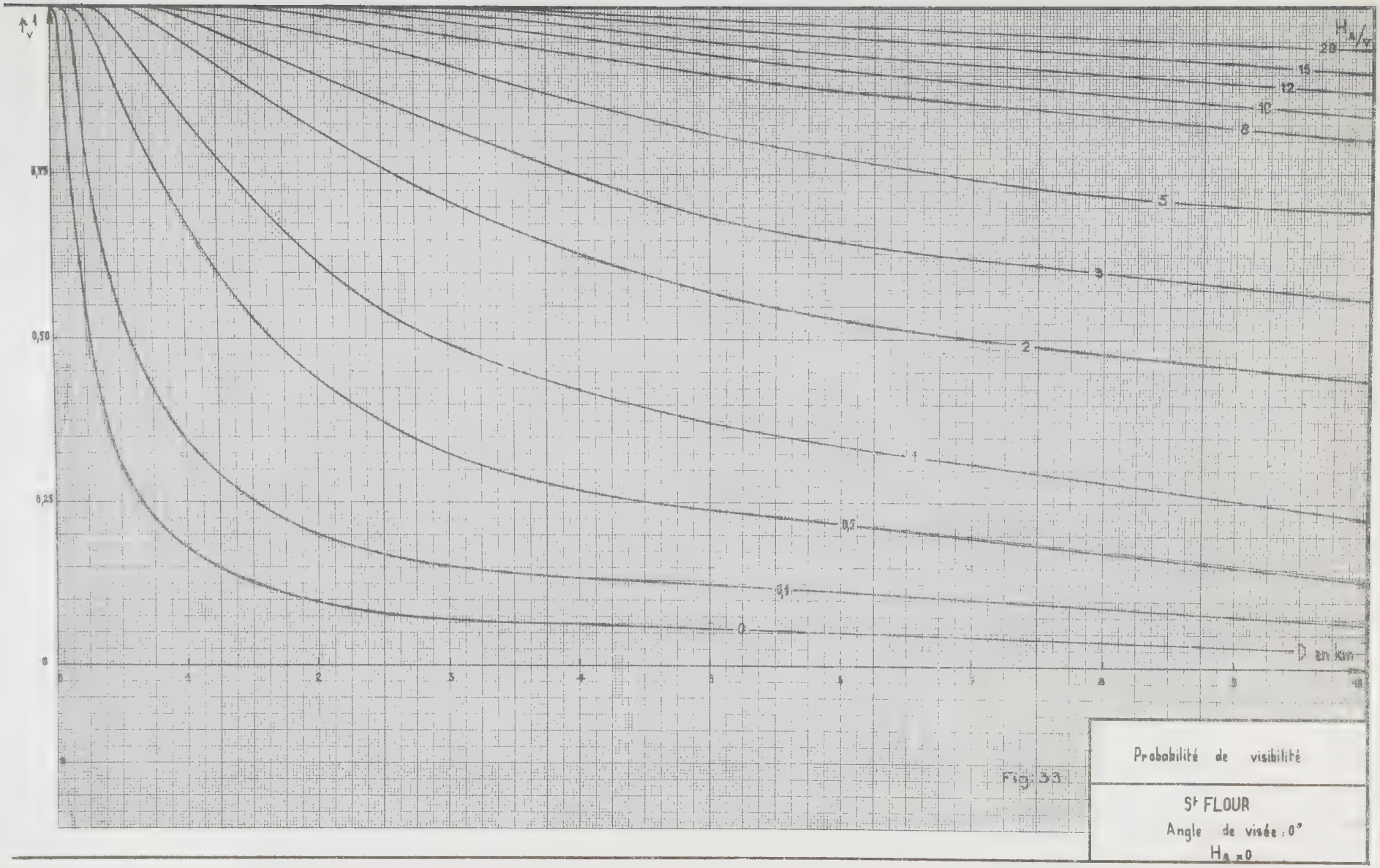


Fig. 33

Probabilité de visibilité

St FLOUR

Angle de visée : 0°

$H_a = 0$

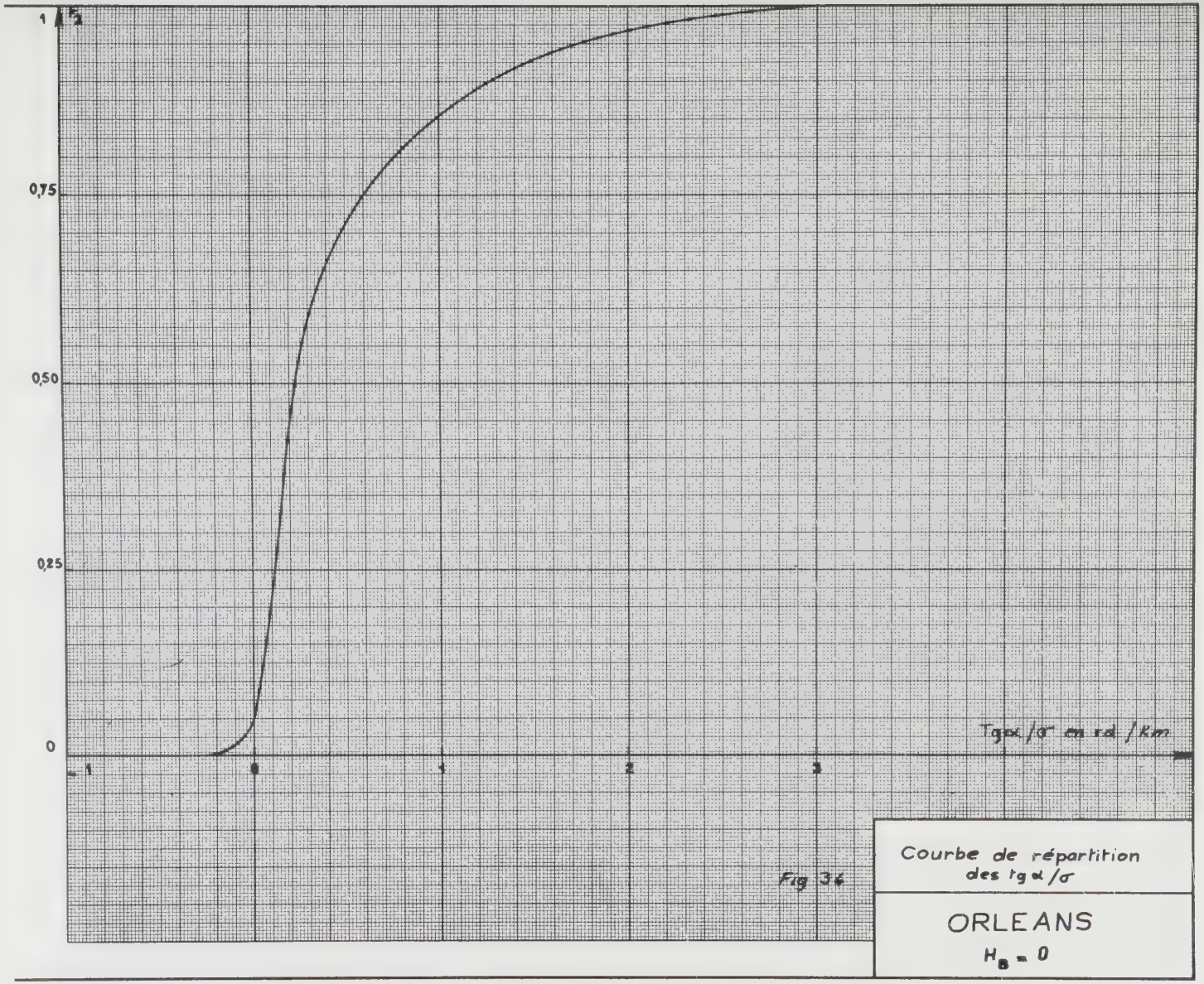


Fig 34

Courbe de répartition des $tg\alpha/\sigma$

ORLEANS

$H_B = 0$

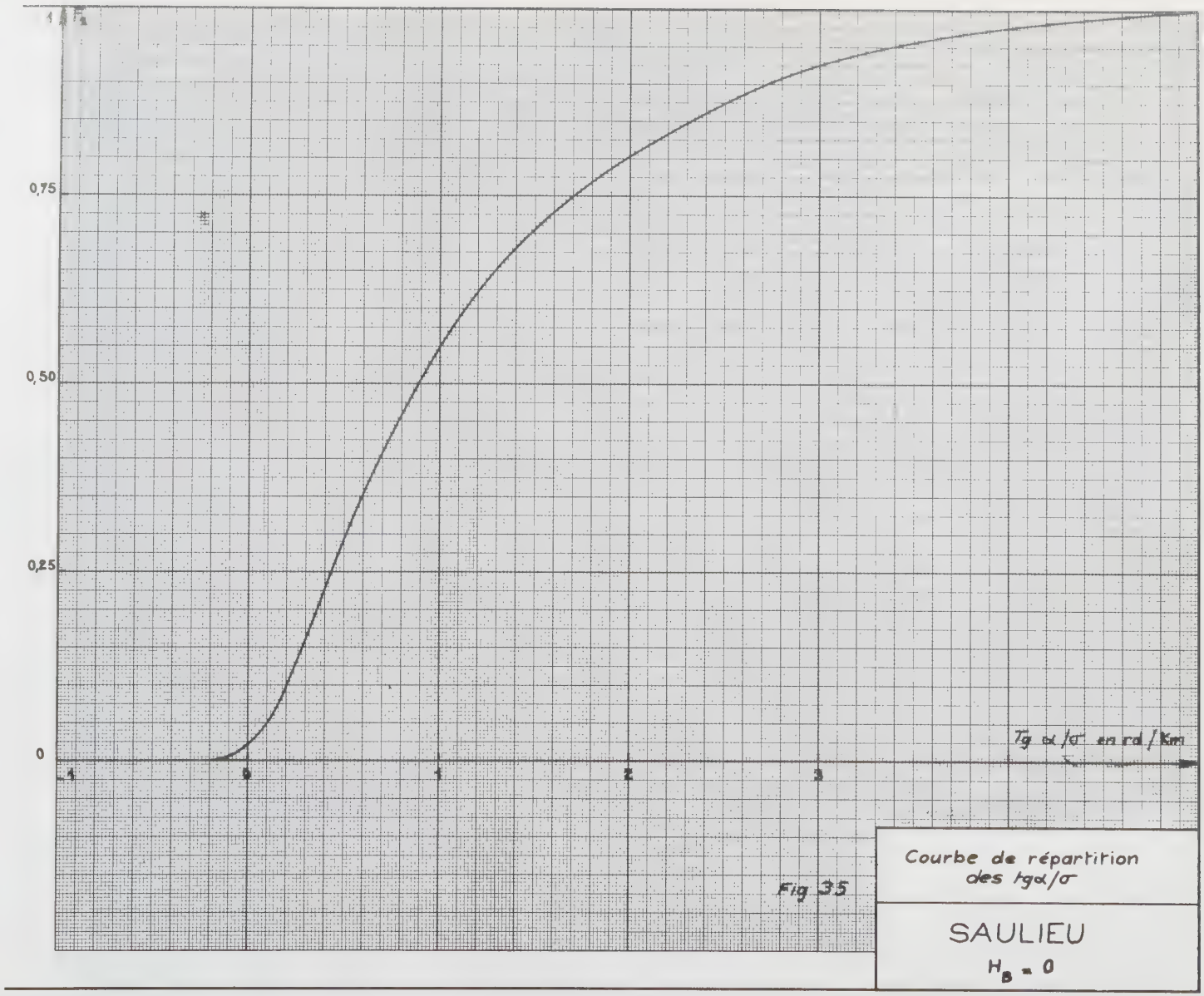


Fig 35

Courbe de répartition
des tgα/σ

SAULIEU

$H_B = 0$

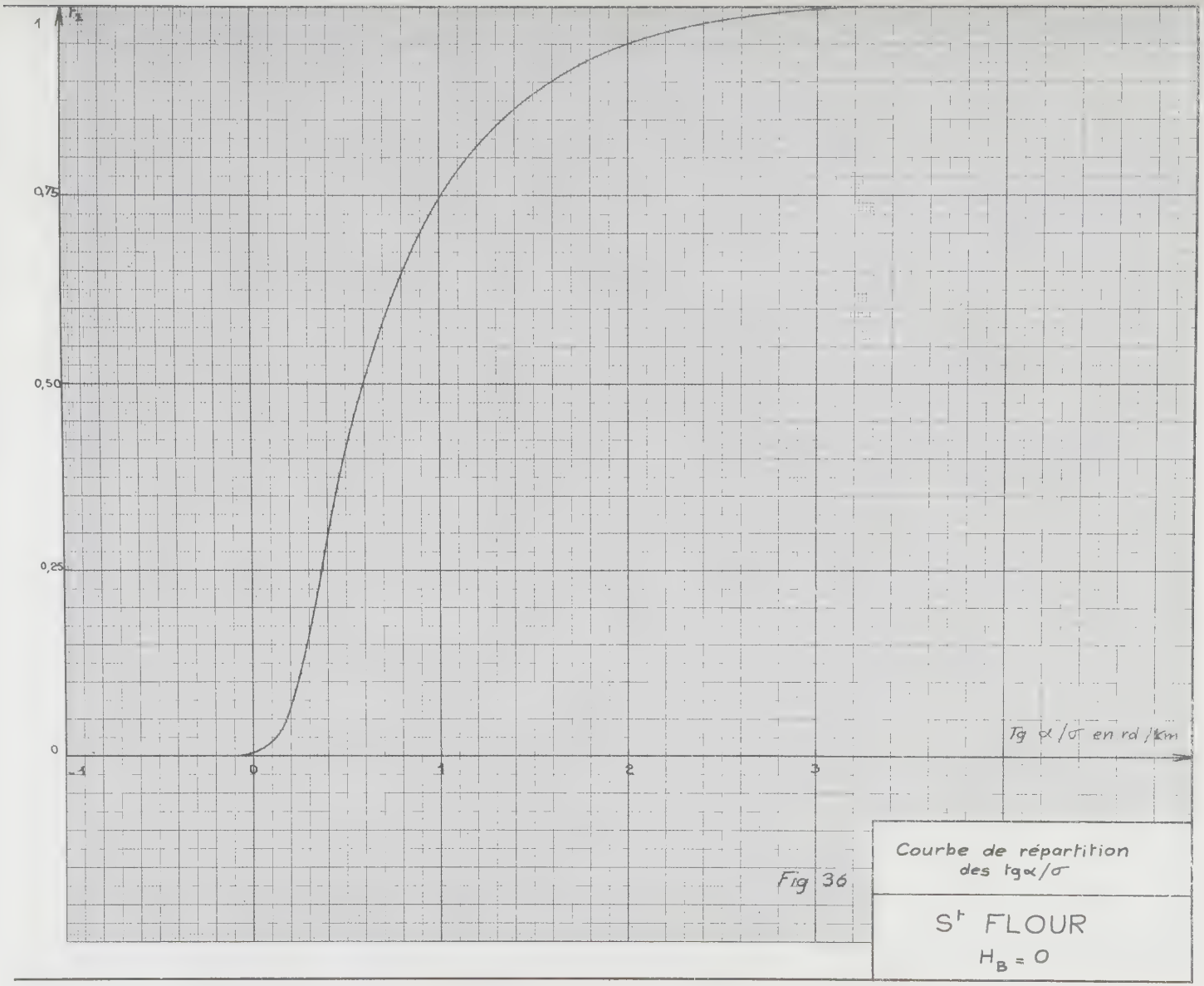


Fig 36

Courbe de répartition des tgα/σ

S^t FLOUR

$H_B = 0$

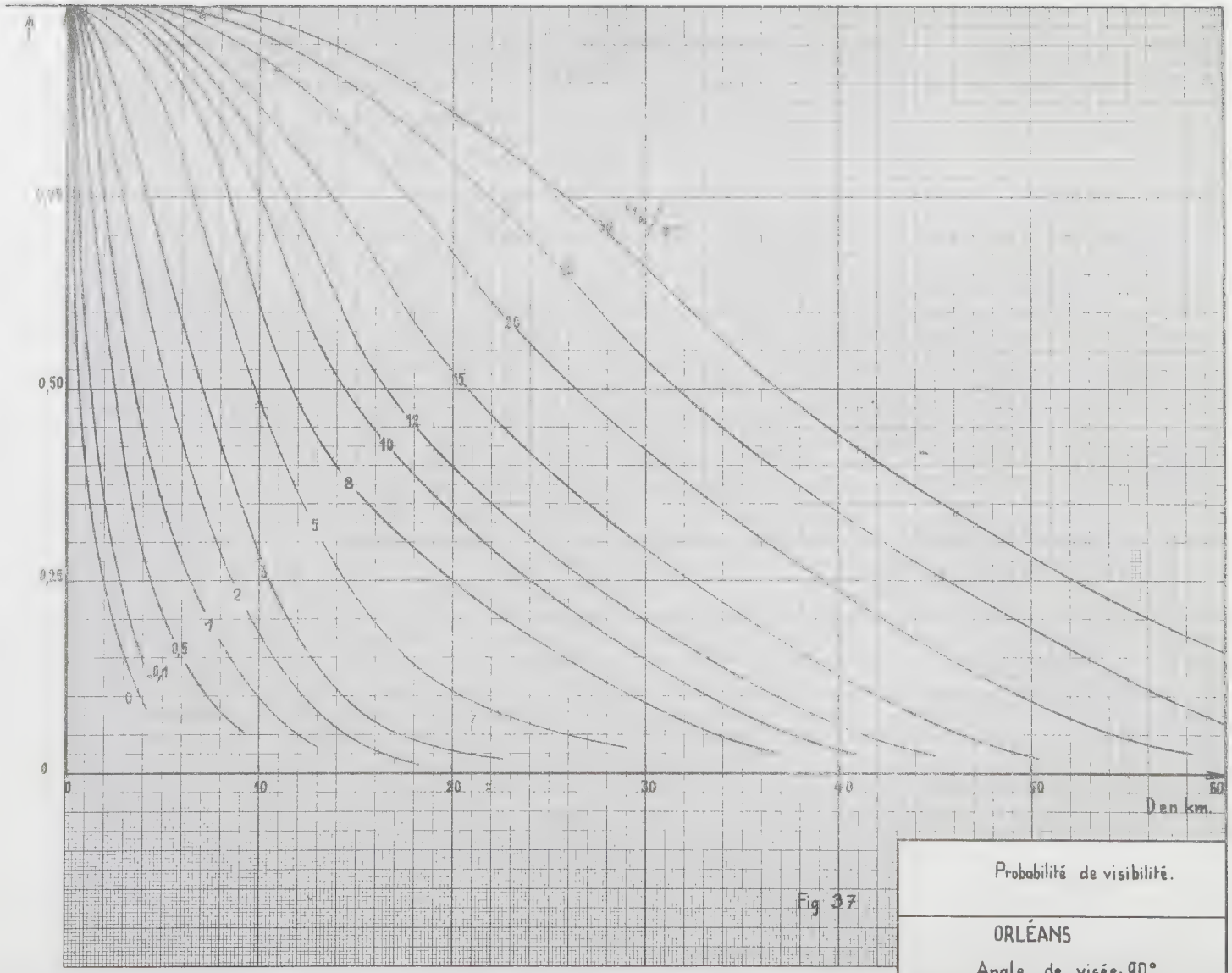


Fig 37

Probabilité de visibilité.

ORLÉANS

Angle de visée: 90°

$H_a = 0$

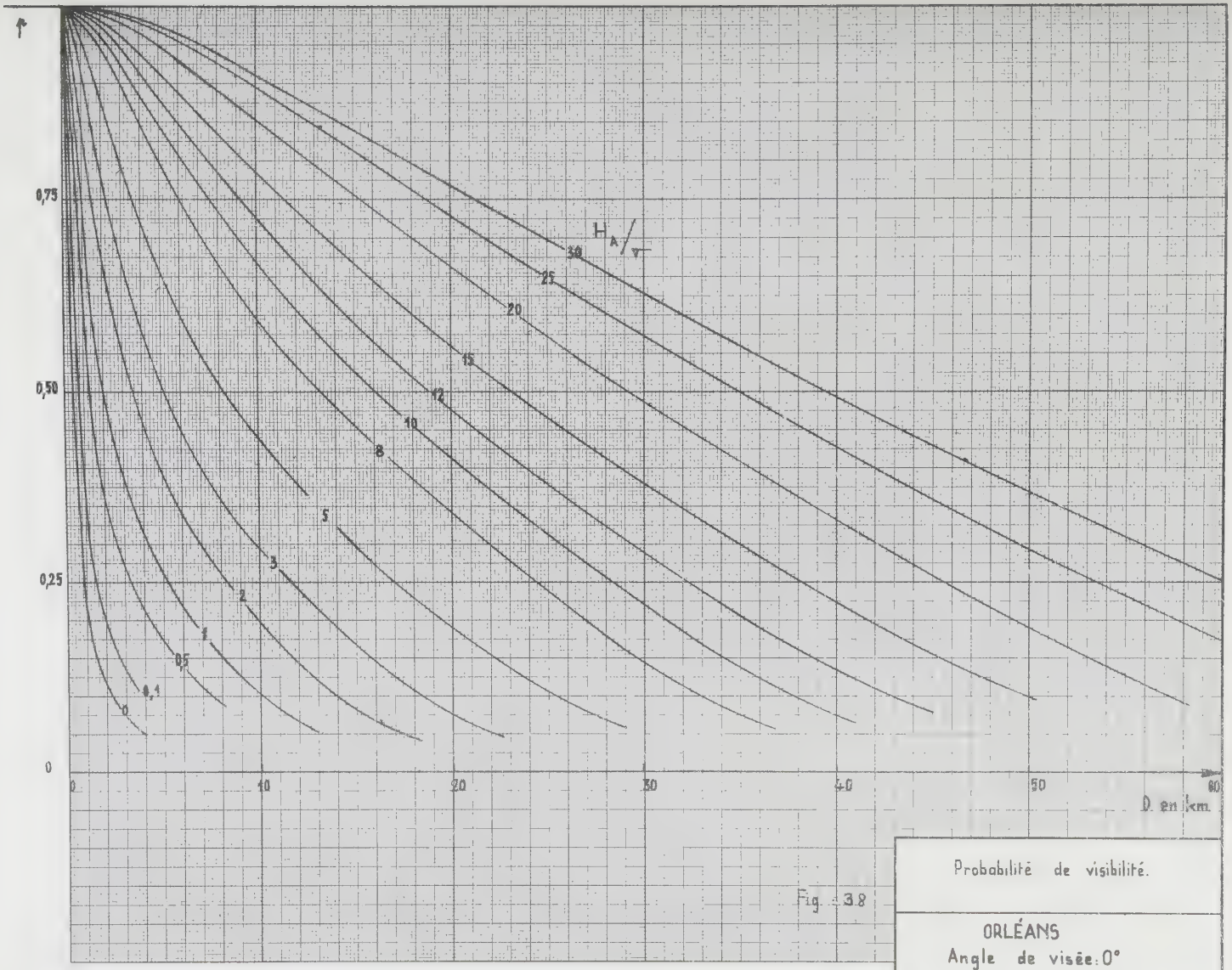


Fig. 38

Probabilité de visibilité.

ORLÉANS
Angle de visée: 0°
$H_B = 0$

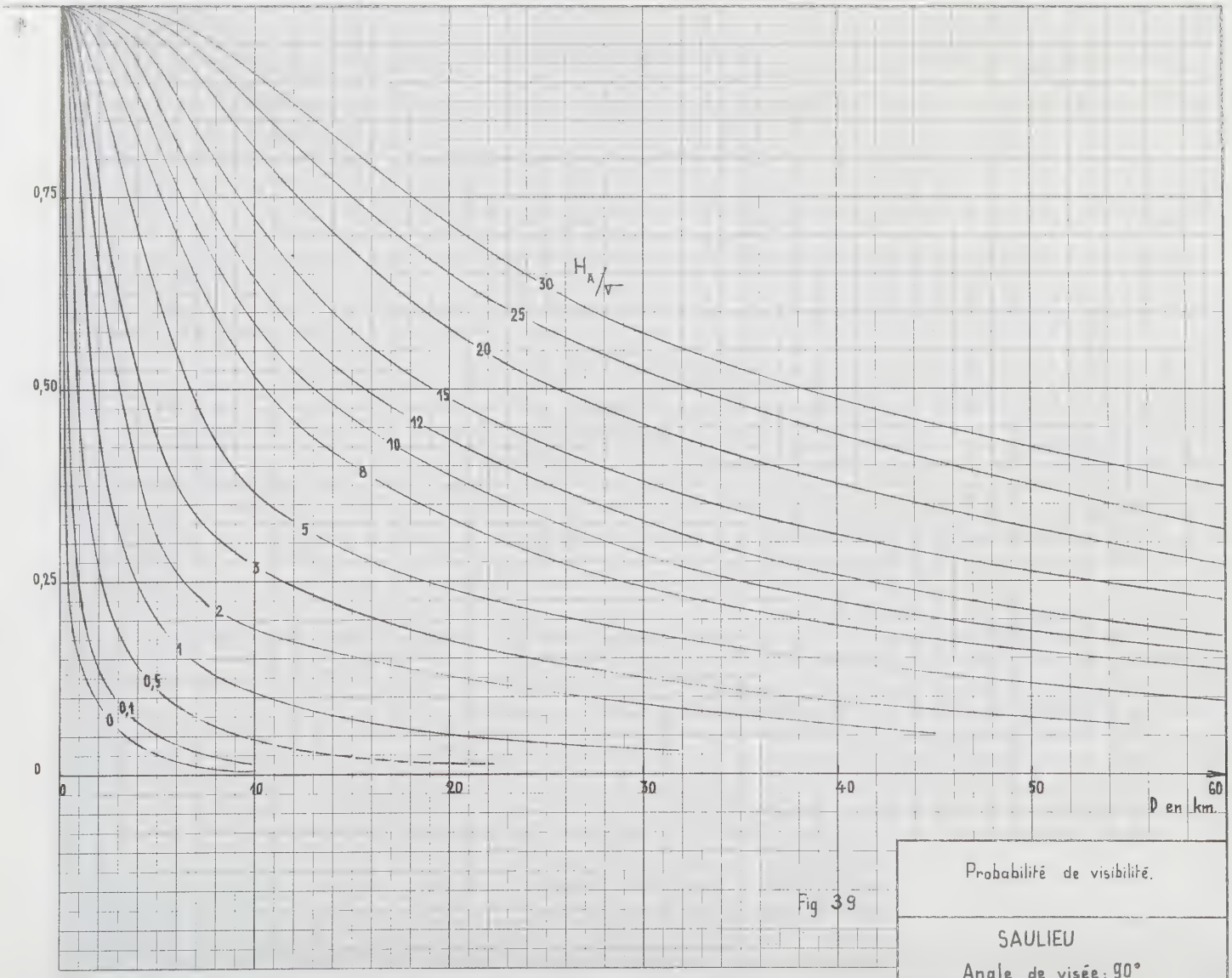


Fig 39

Probabilité de visibilité.

SAULIEU

Angle de visée : 90°

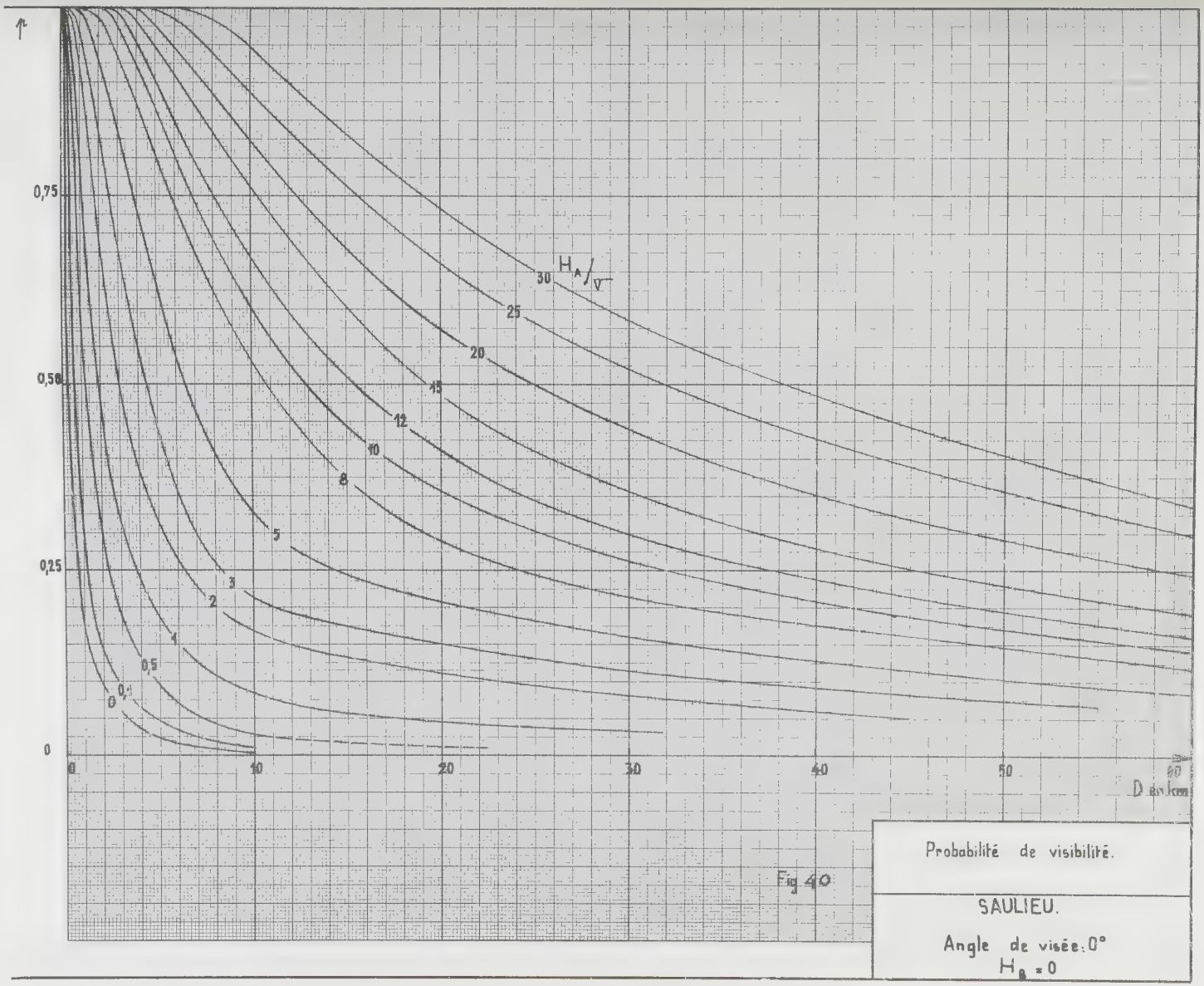


Fig 40

Probabilité de visibilité.

SAULIEU.

Angle de visée: 0°
$H_B = 0$

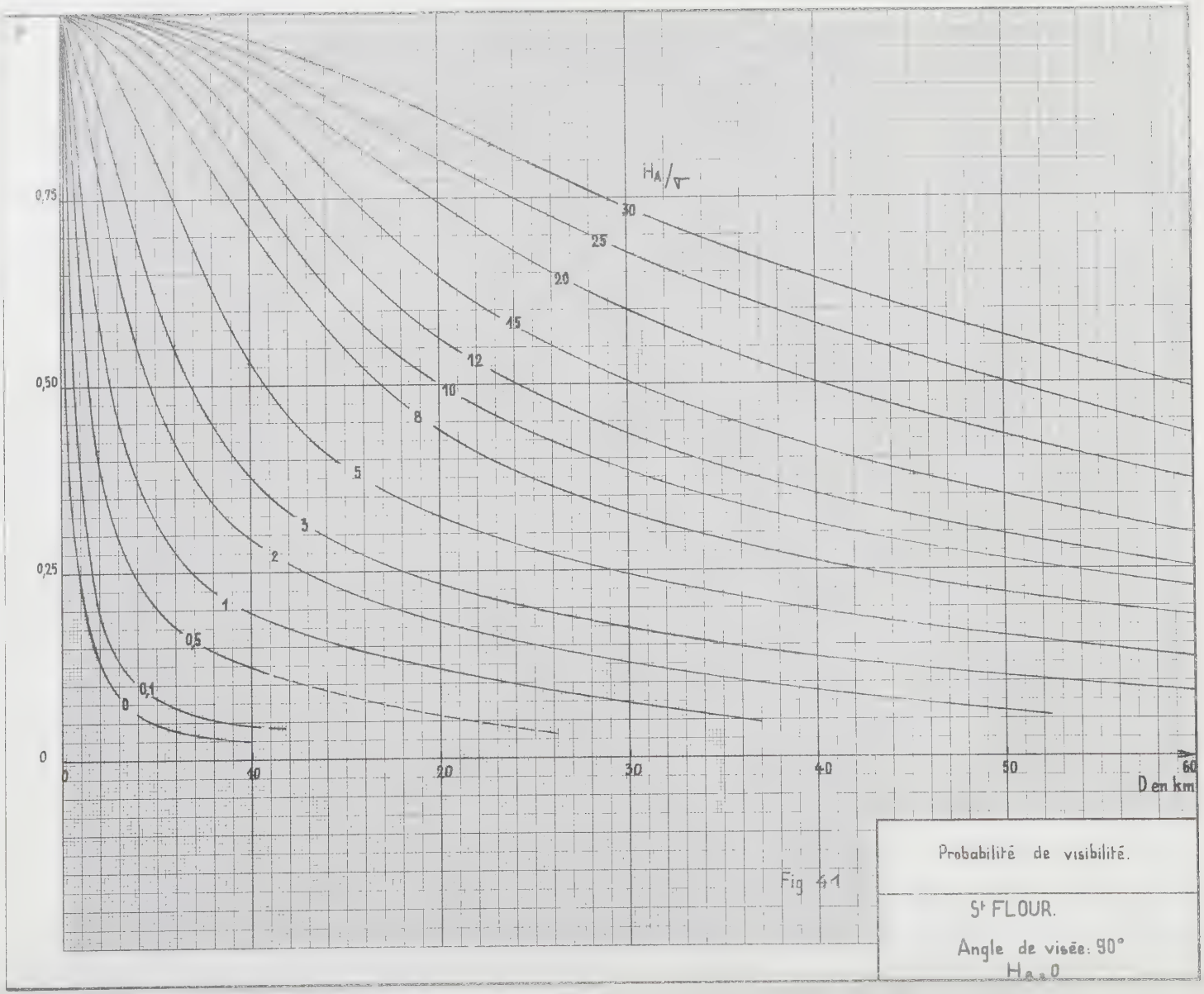

H_A/σ
30
25
20
15
12
10
8
5
3
2
1
0,5
0,1
0
0,75
0,50
0,25
0
0
10
20
30
40
50
60
D en km
Probabilité de visibilité.
St FLOUR.
Angle de visée: 90°
H_e = 0

Fig 41

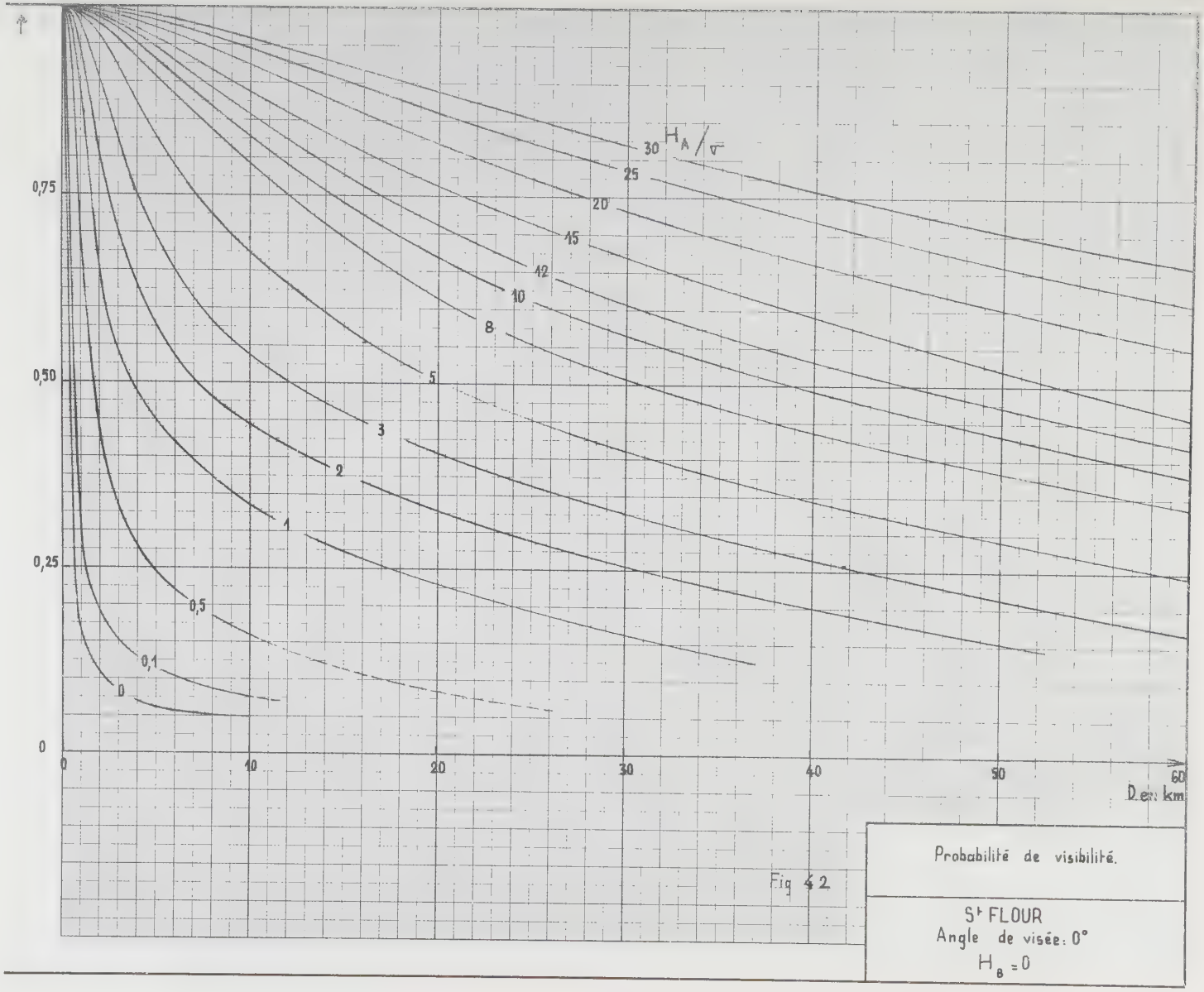


Fig 42

Probabilité de visibilité.

St FLOUR
Angle de visée: 0°
$H_B = 0$

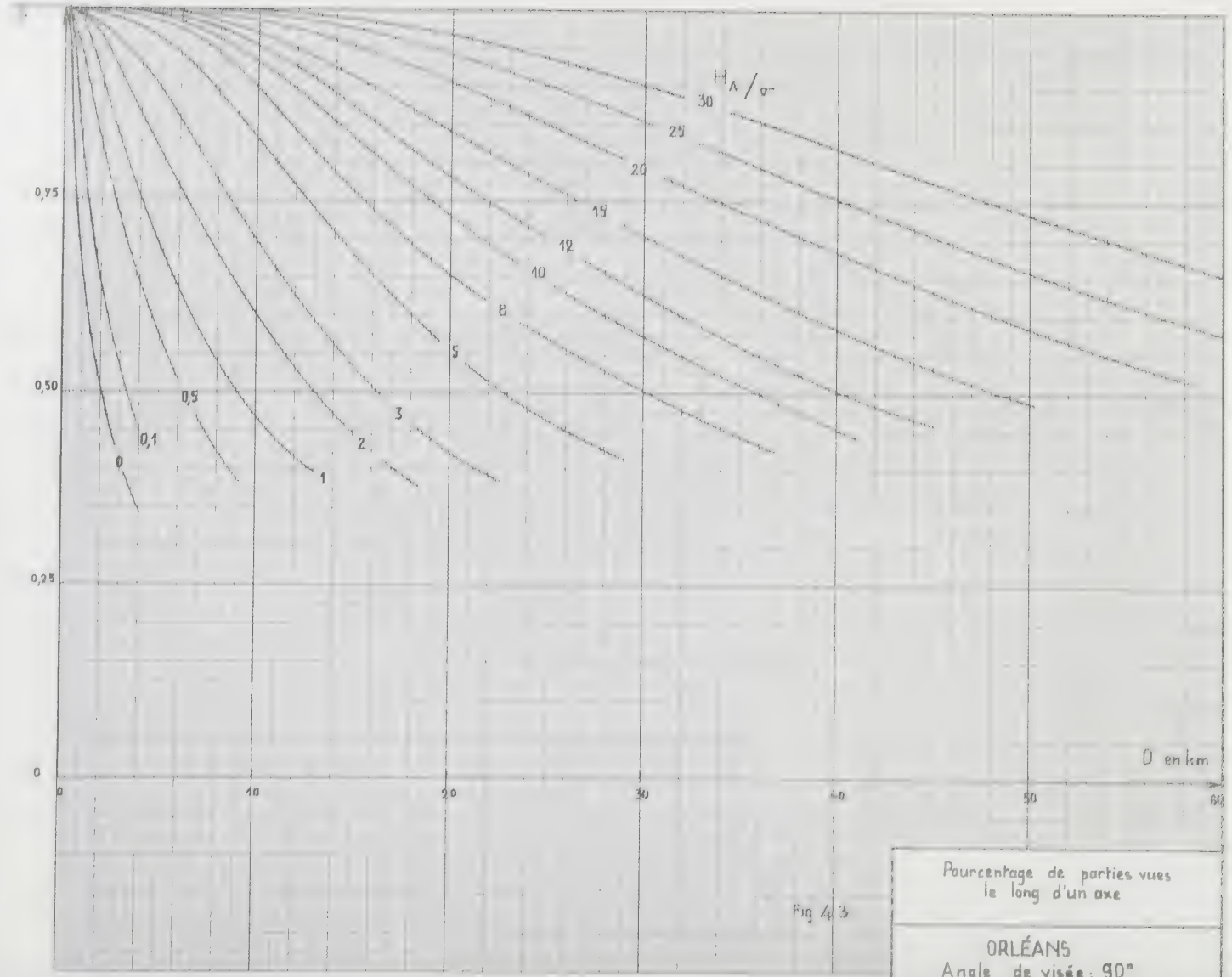


Fig 4.3

Pourcentage de parties vues le long d'un axe

ORLÉANS
Angle de visée : 90°
$H_B = 0$

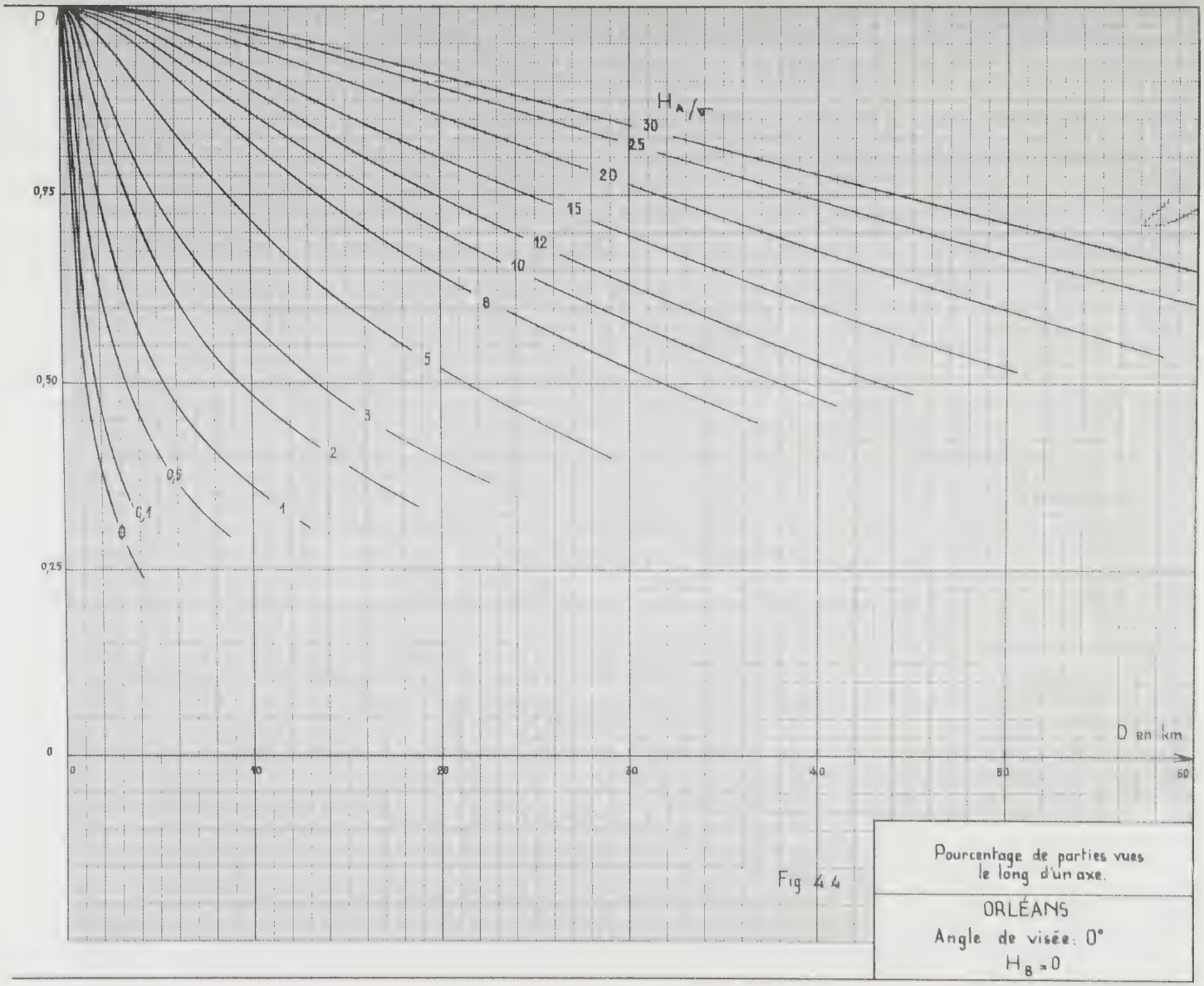


Fig 4.4

Pourcentage de parties vues le long d'un axe.

ORLÉANS

Angle de visée: 0°

$H_B = 0$

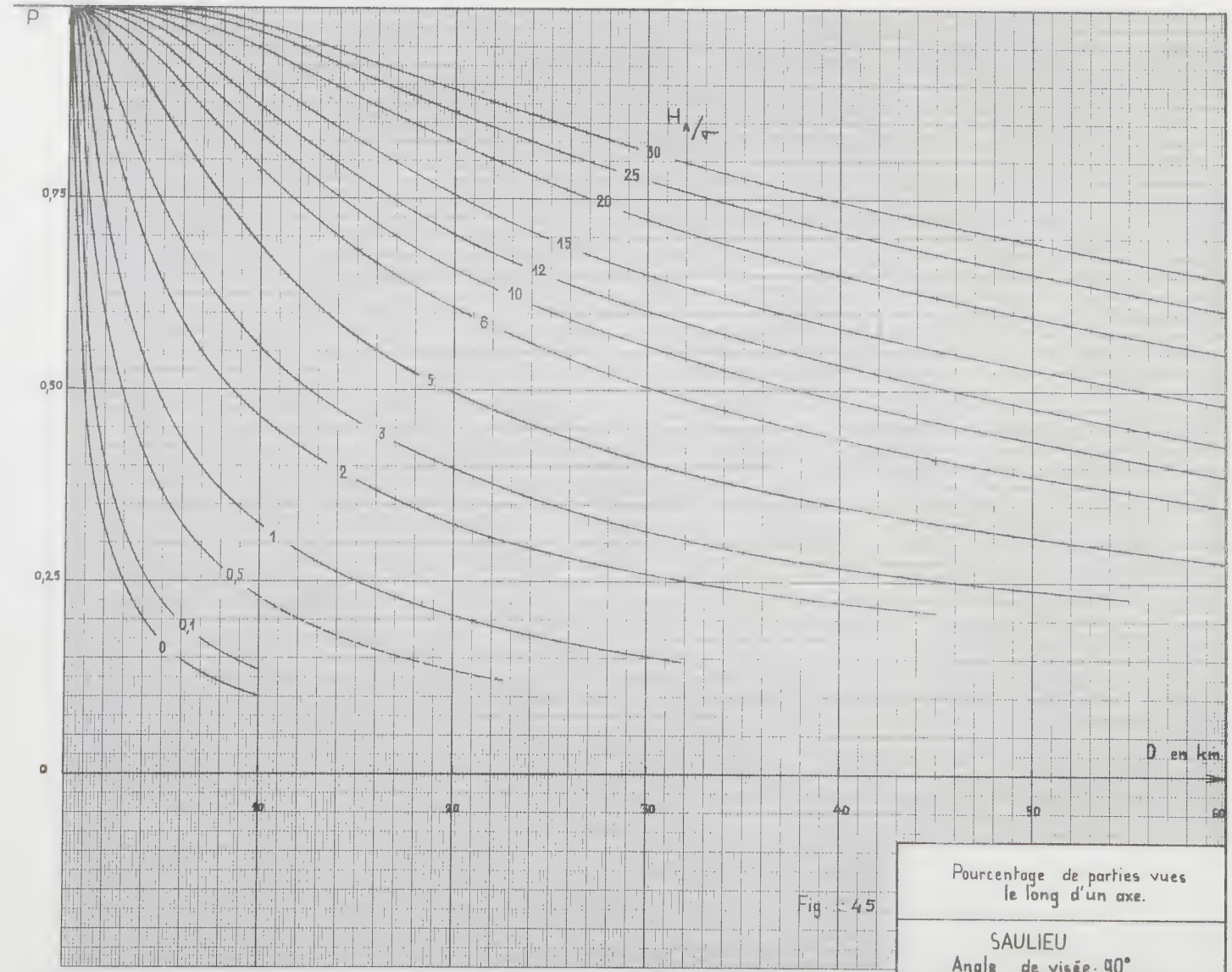


Fig. 45

Pourcentage de parties vues le long d'un axe.

SAULIEU
Angle de visée: 90°
$H_B = 0$

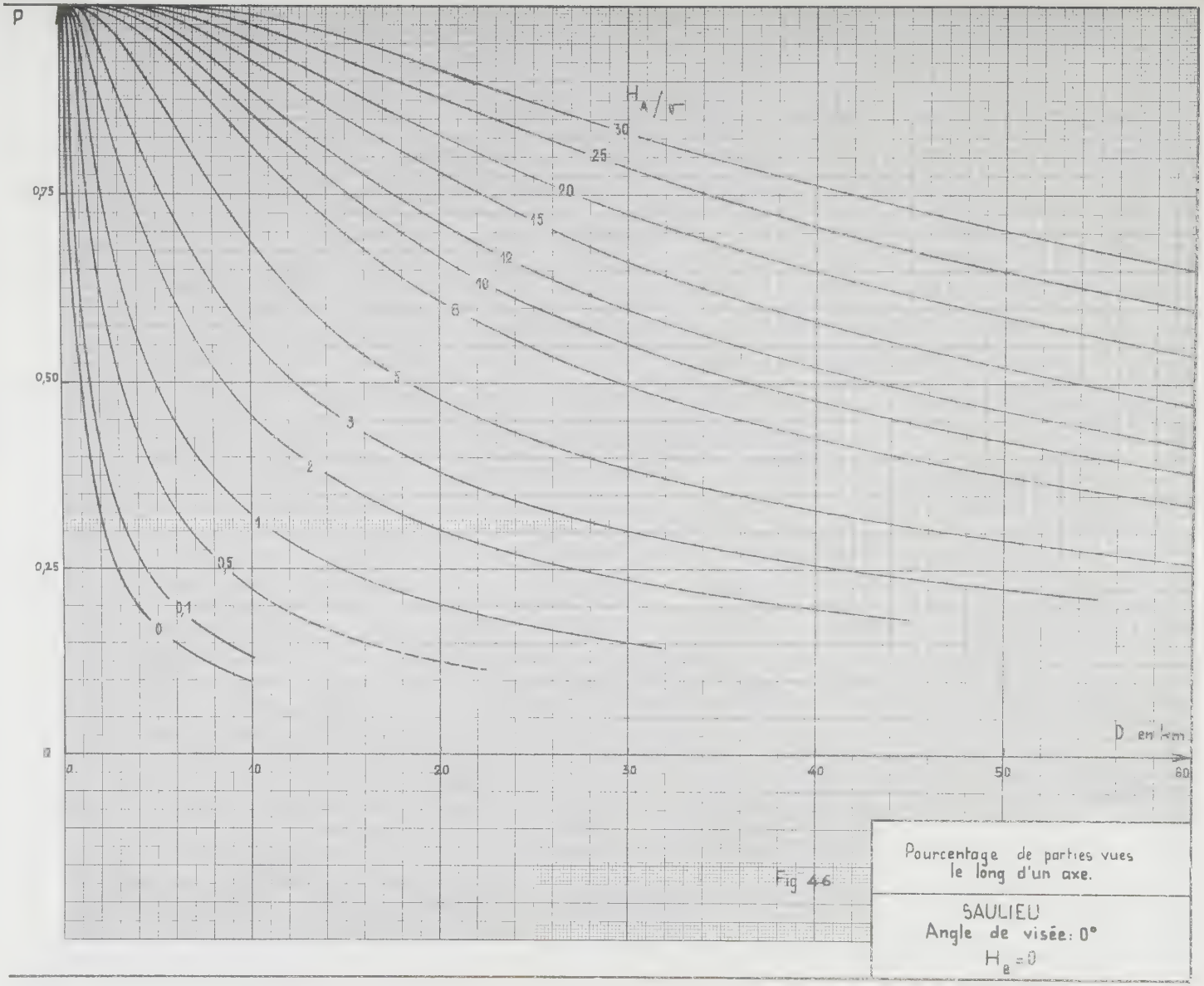


Fig 46

Pourcentage de parties vues le long d'un axe.

SAULIEU
Angle de visée: 0°
$H_B = 0$

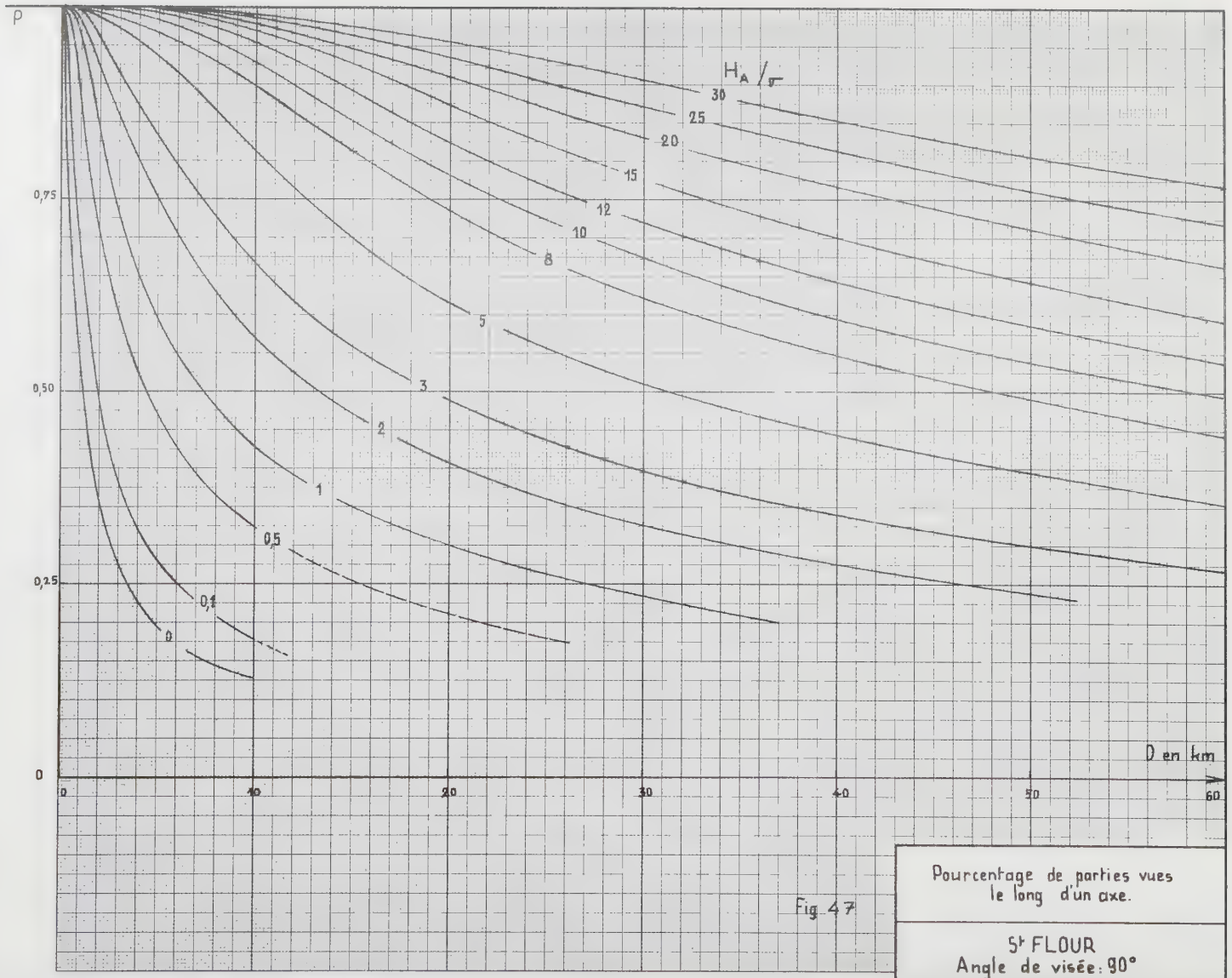


Fig. 47

Pourcentage de parties vues le long d'un axe.

St FLOUR
Angle de visée: 90°
$H_B = 0$

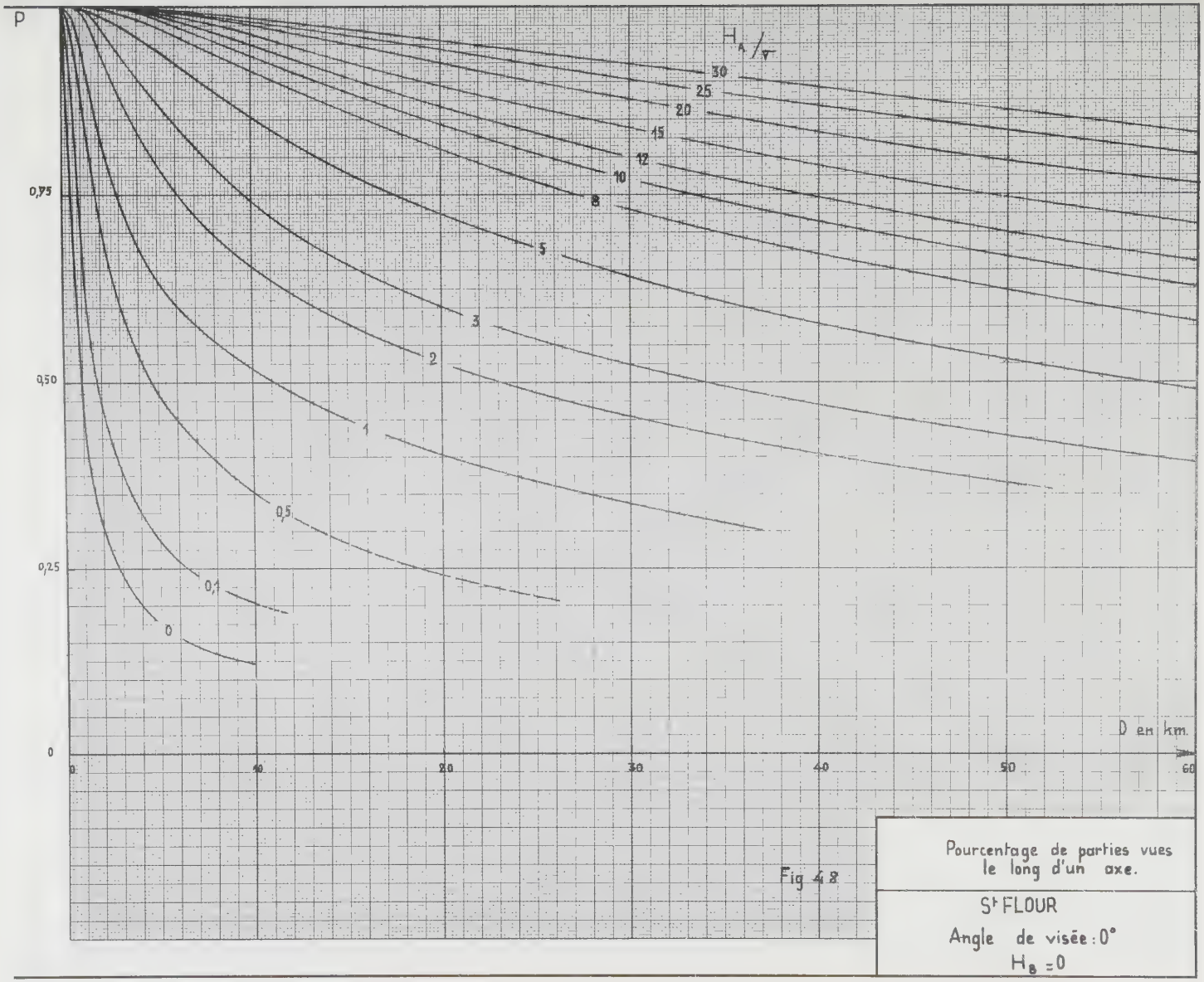


Fig 4.8

Pourcentage de parties vues le long d'un axe.

St FLOUR

Angle de visée : 0°

$H_B = 0$

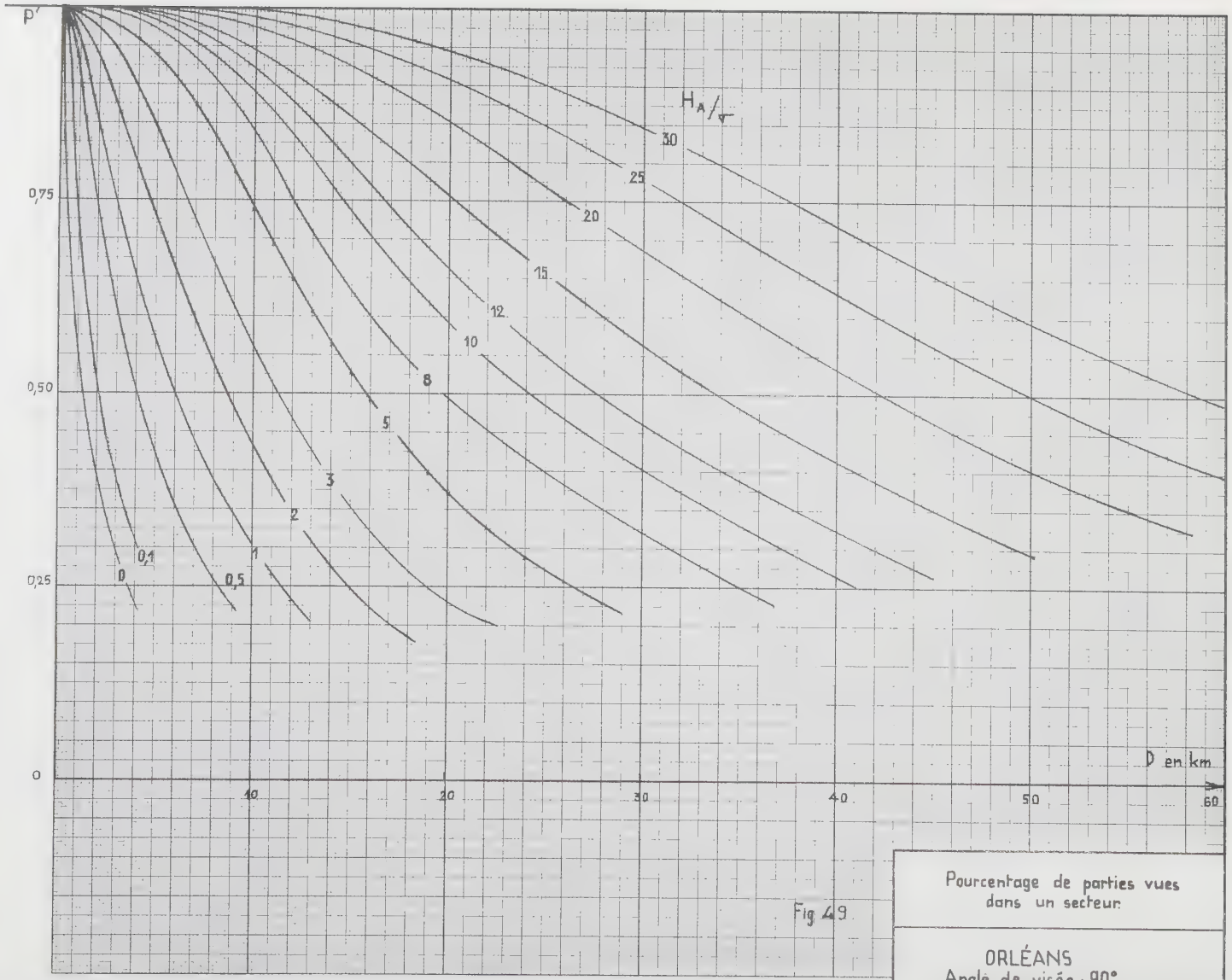


Fig 49

Pourcentage de parties vues dans un secteur

ORLÉANS
Angle de visée : 90°
$H_B = 0$

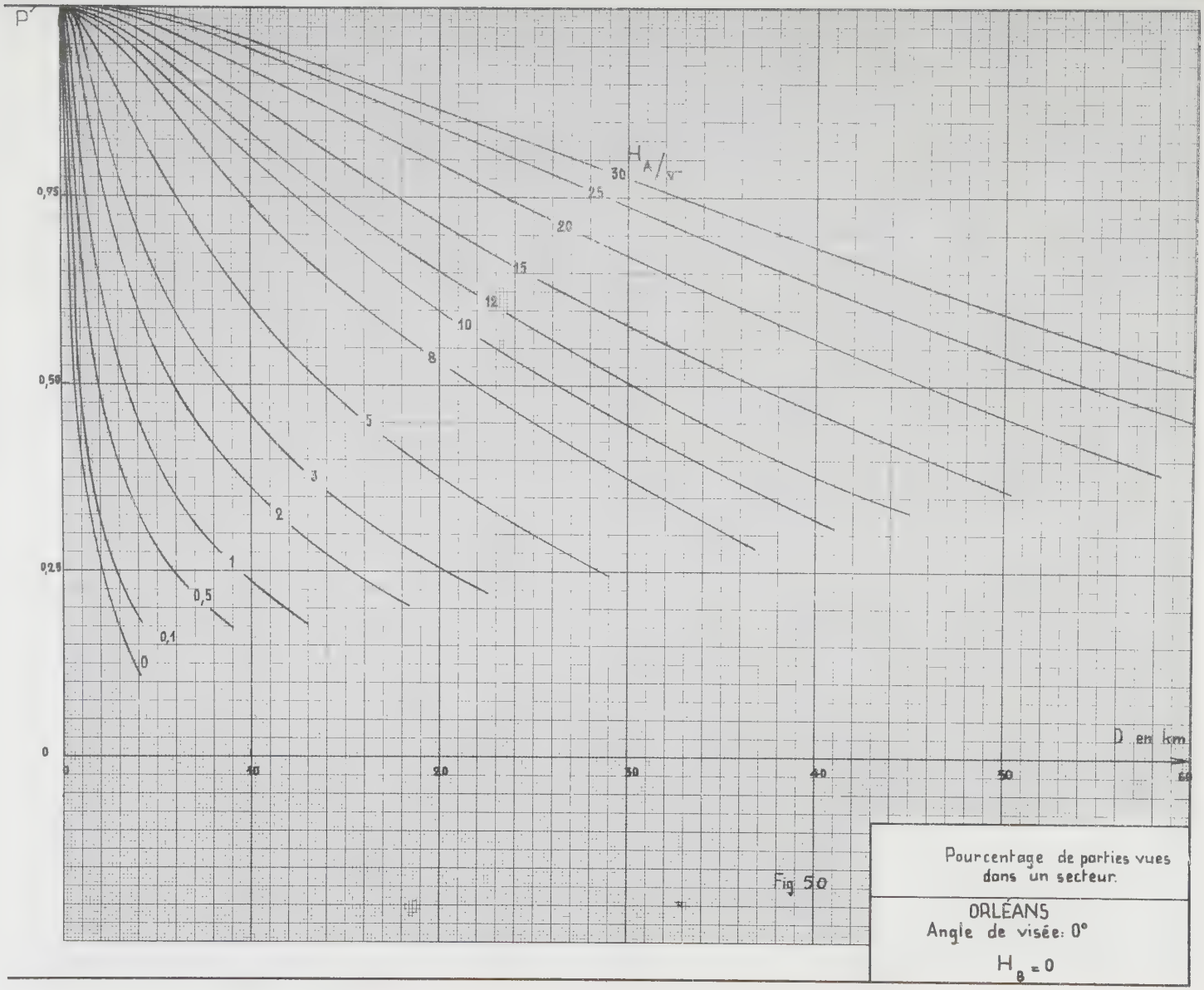


Fig 50

Pourcentage de parties vues dans un secteur.

ORLÉANS
Angle de visée: 0°
$H_B = 0$

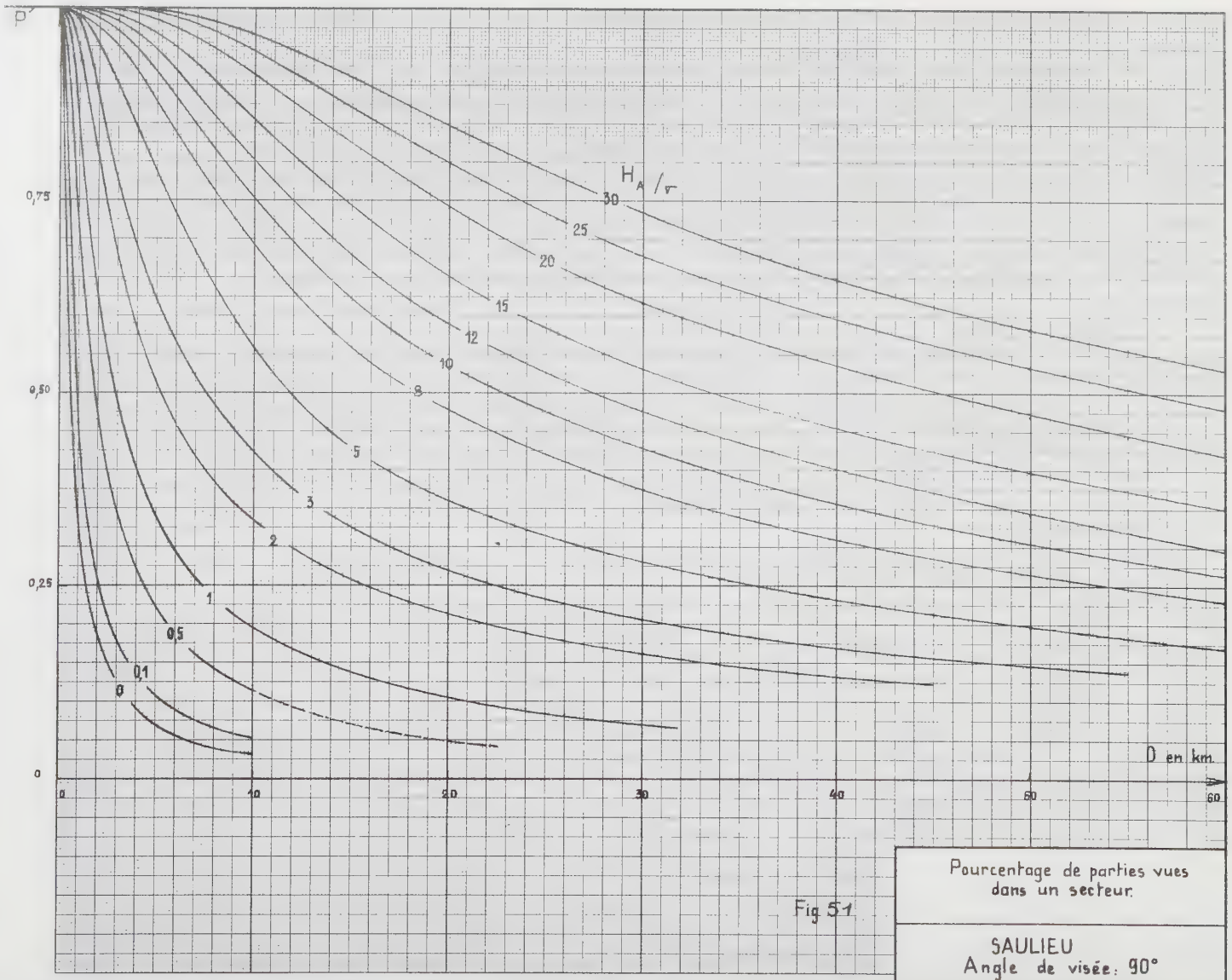


Fig 5.1

Pourcentage de parties vues dans un secteur.

SAULIEU
Angle de visée : 90°
$H_B = 0$

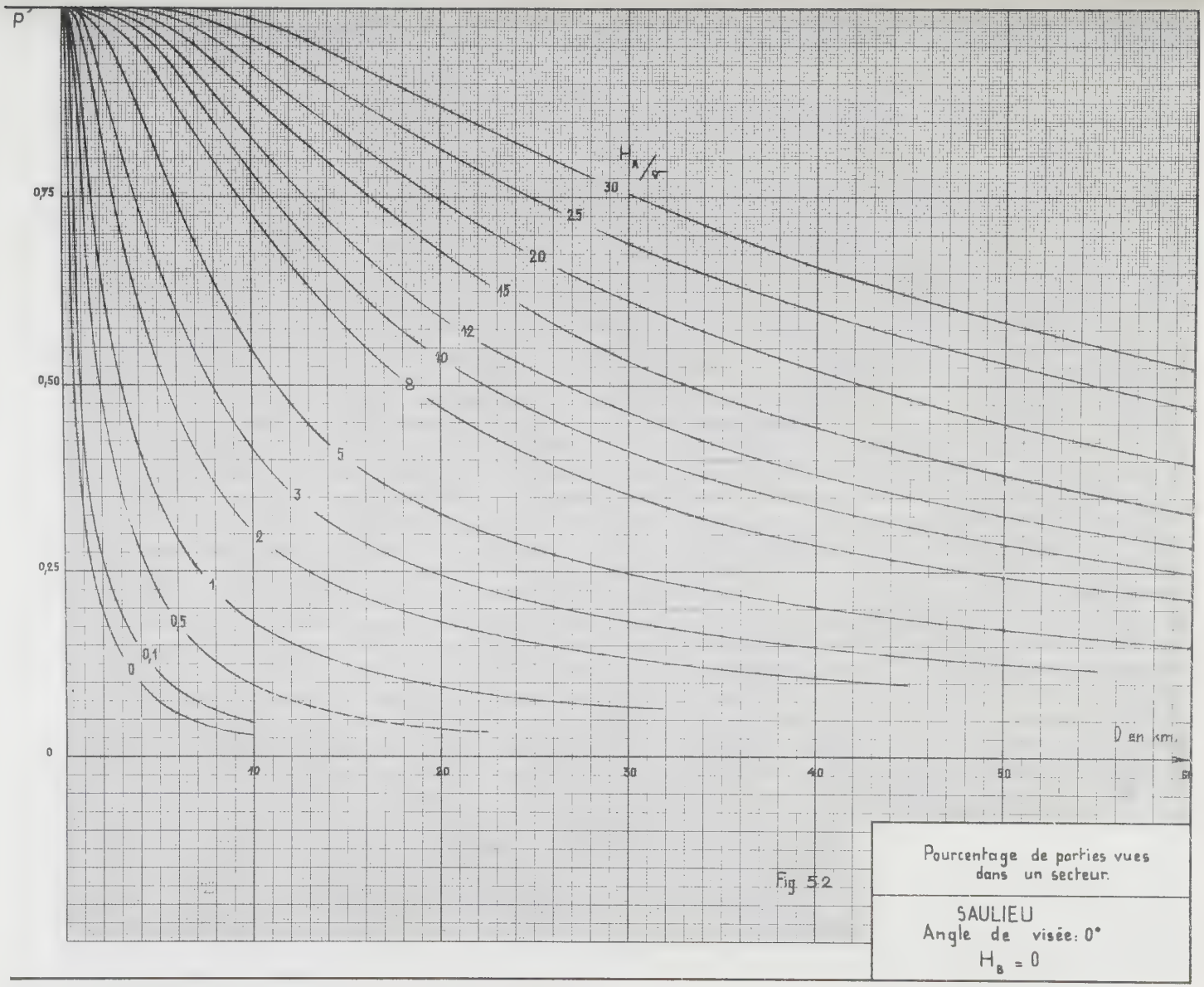

P'
0,75
0,50
0,25
0
H_A/σ
30
25
20
15
12
10
8
5
3
2
1
0,5
0,1
0
D en km.
10
20
30
40
50
Pourcentage de parties vues dans un secteur.
SAULIEU
Angle de visée: 0°
$H_B = 0$

Fig 5.2

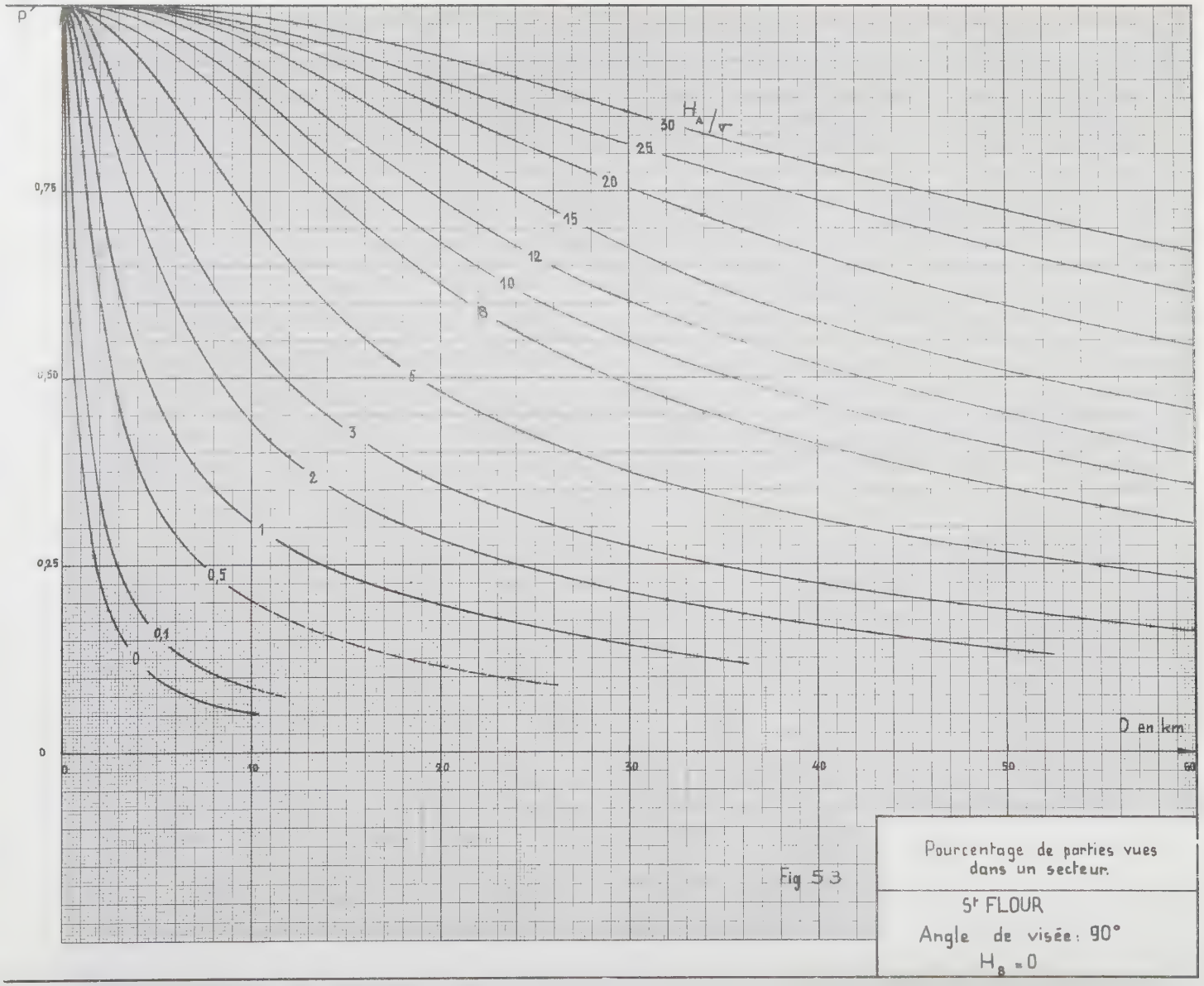


Fig 53

Pourcentage de parties vues dans un secteur.

St FLOUR

Angle de visée : 90°

$H_B = 0$

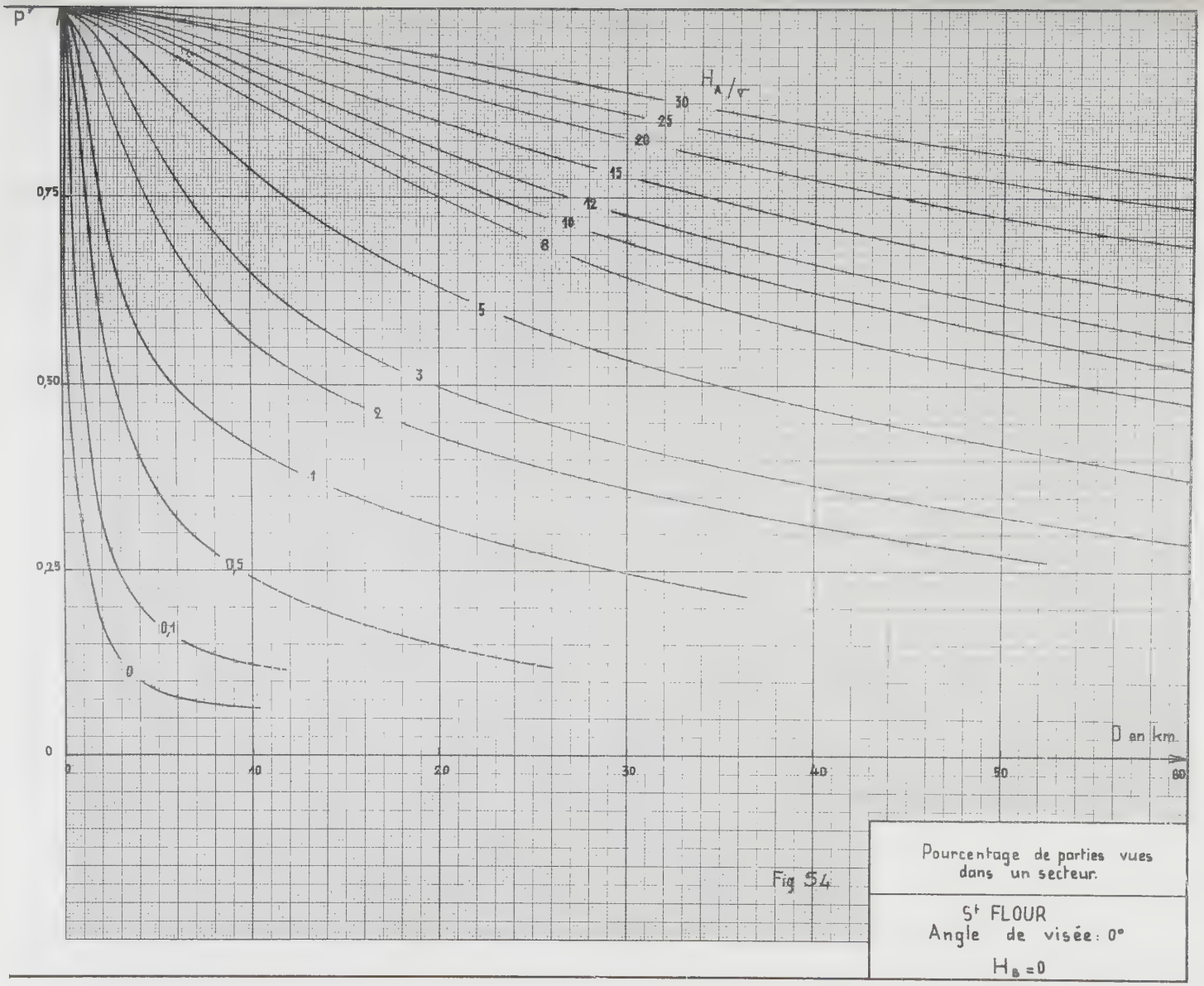


Fig 54

Pourcentage de parties vues dans un secteur.

St FLOUR
Angle de visée : 0°
$H_B = 0$

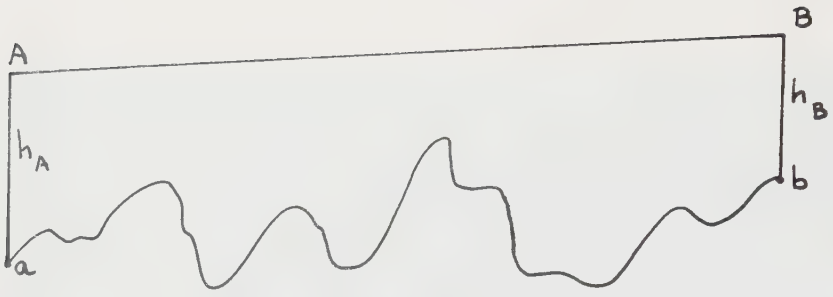


Fig 55

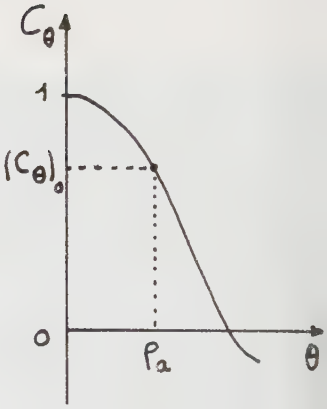


Fig 56

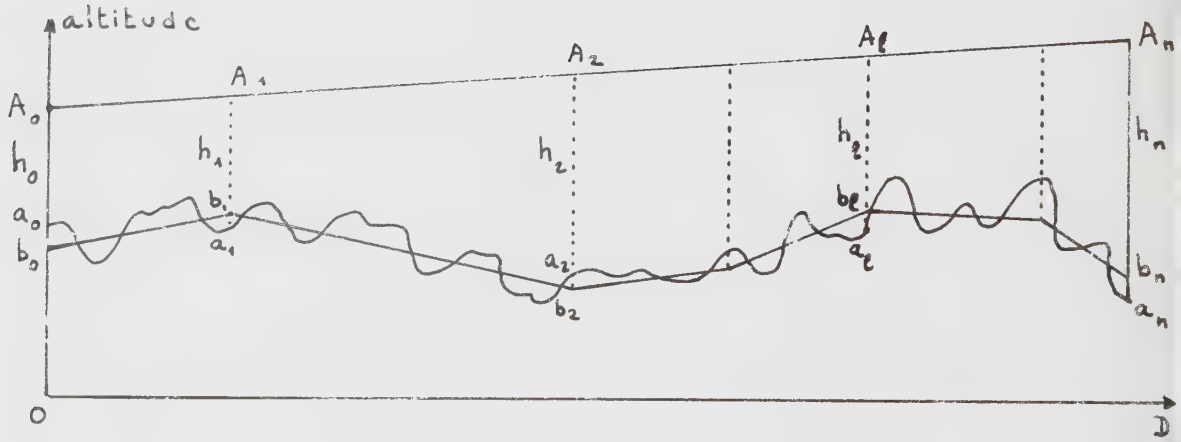


Fig 57

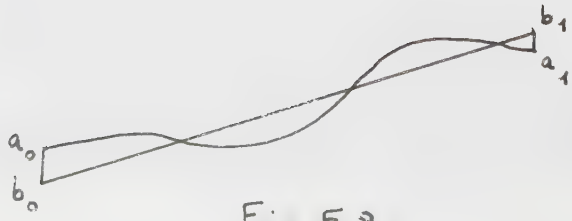


Fig 58

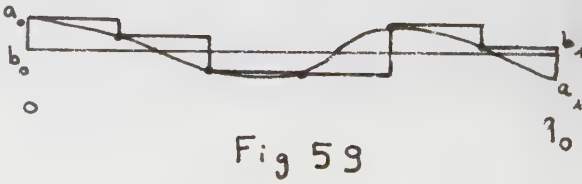
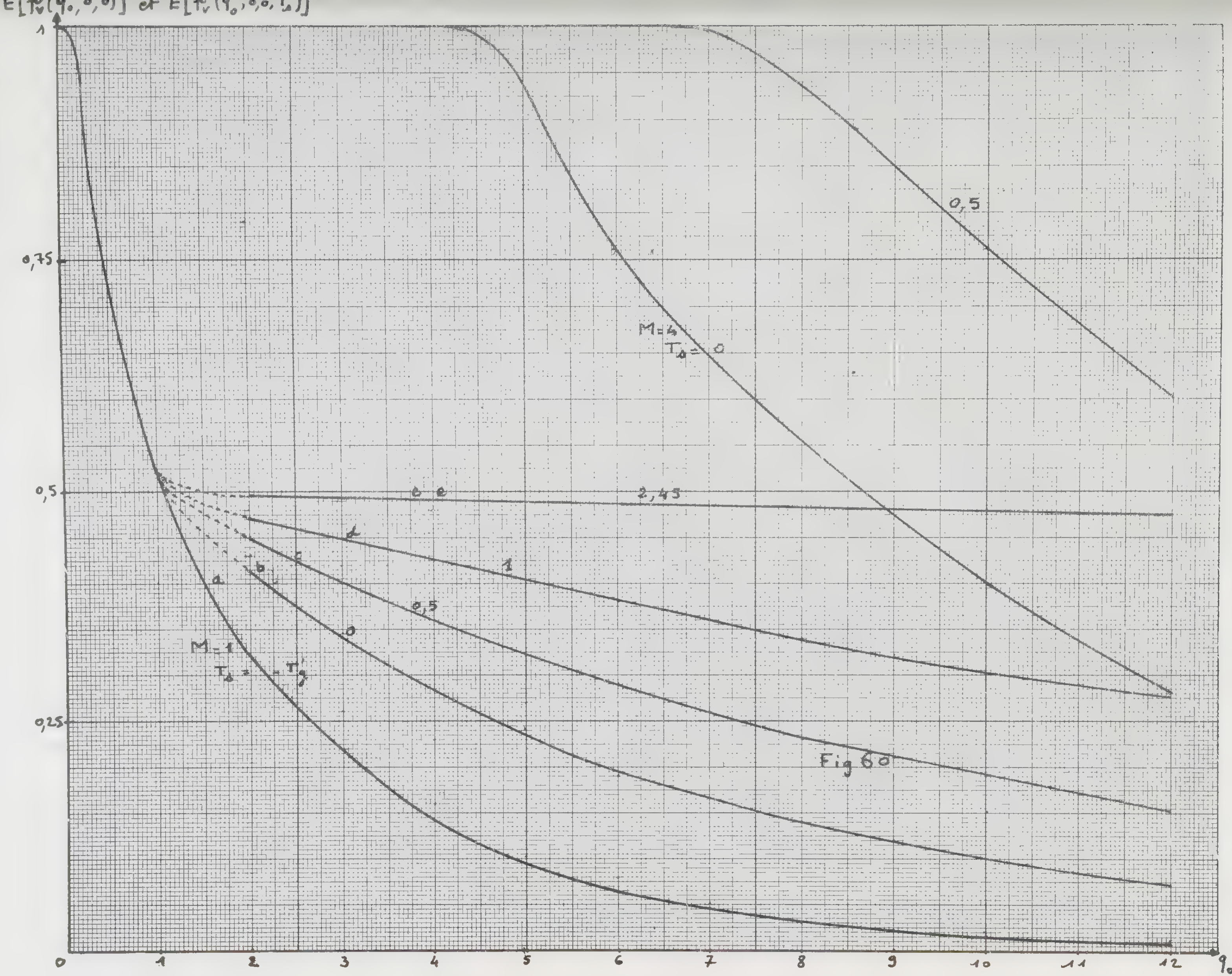


Fig 59



E[T_v(q_0, 0, 0)] et E[T_v(q_0, 0, 0, T_s)]
1
0,75
0,5
0,25
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
q_0
0,5
M=4
T_s = 0
2,45
d
1
c
0,5
b
0
a
M=1
T_s = -T'_g

Fig 60

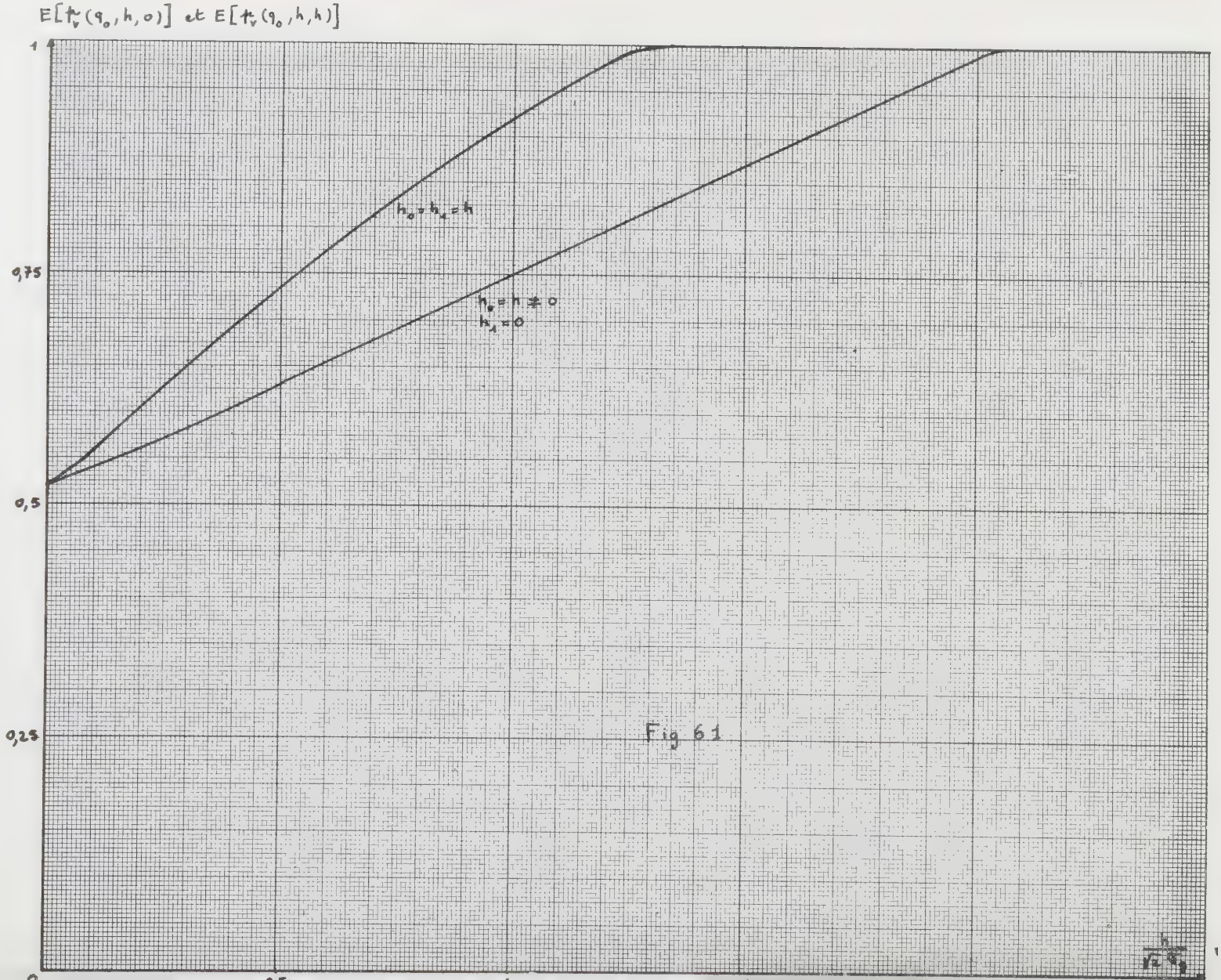


Fig 6.1

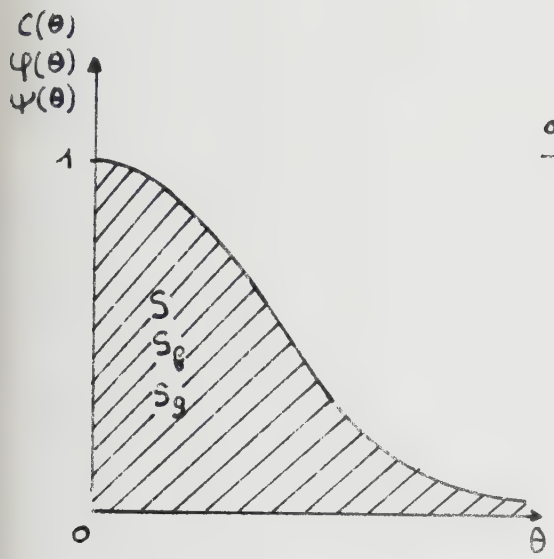


Fig 62

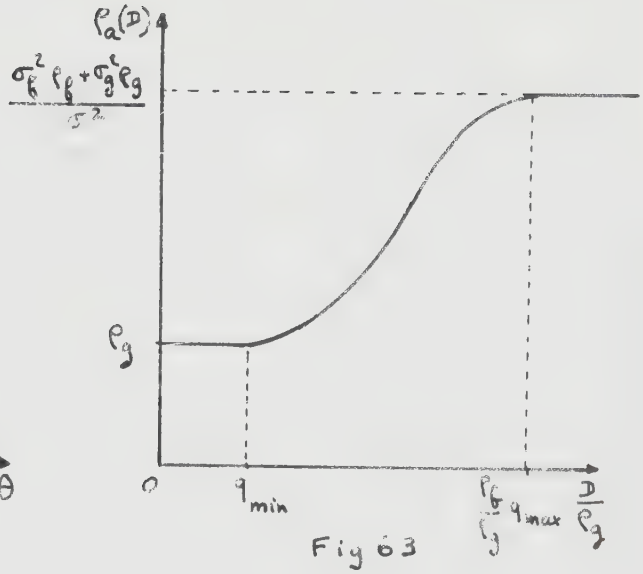


Fig 63

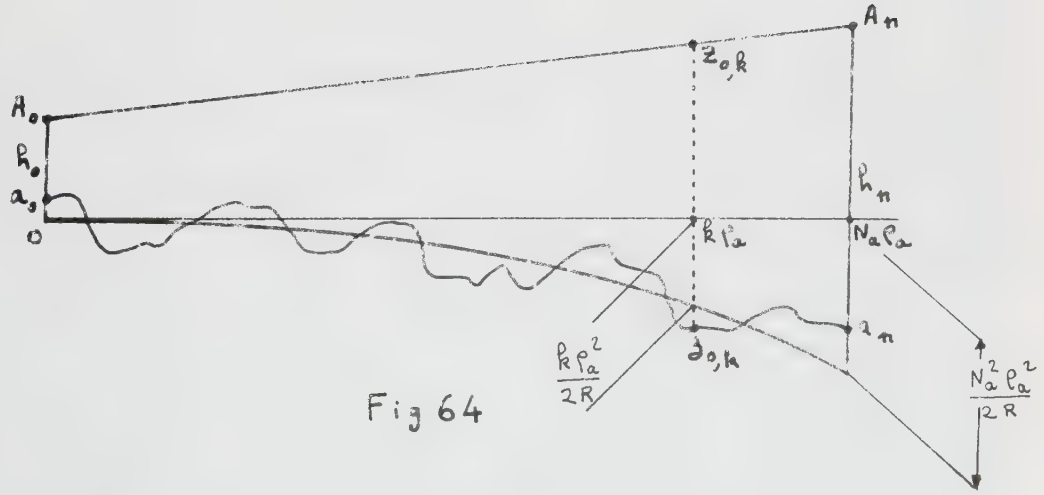


Fig 64

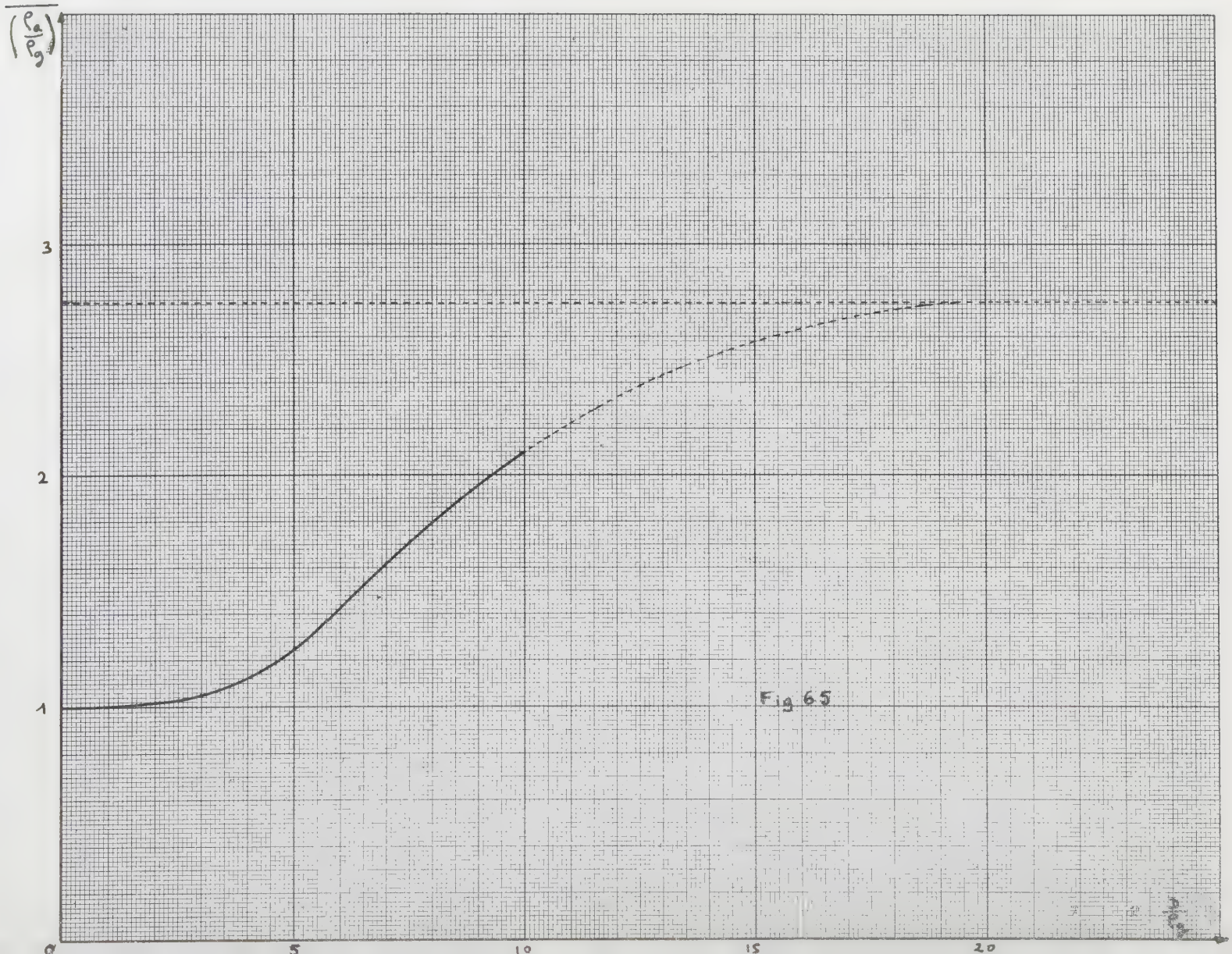


Fig 65

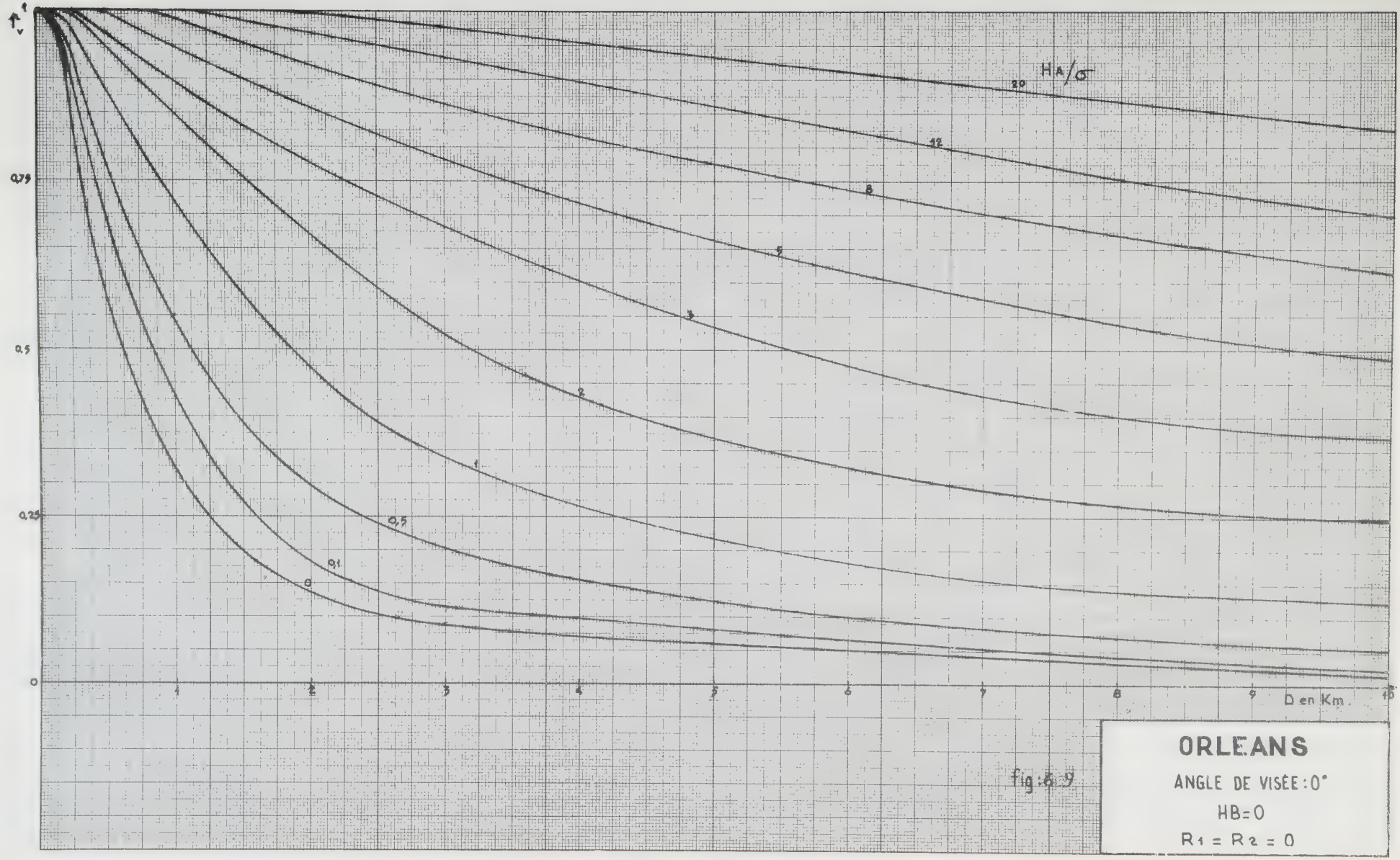


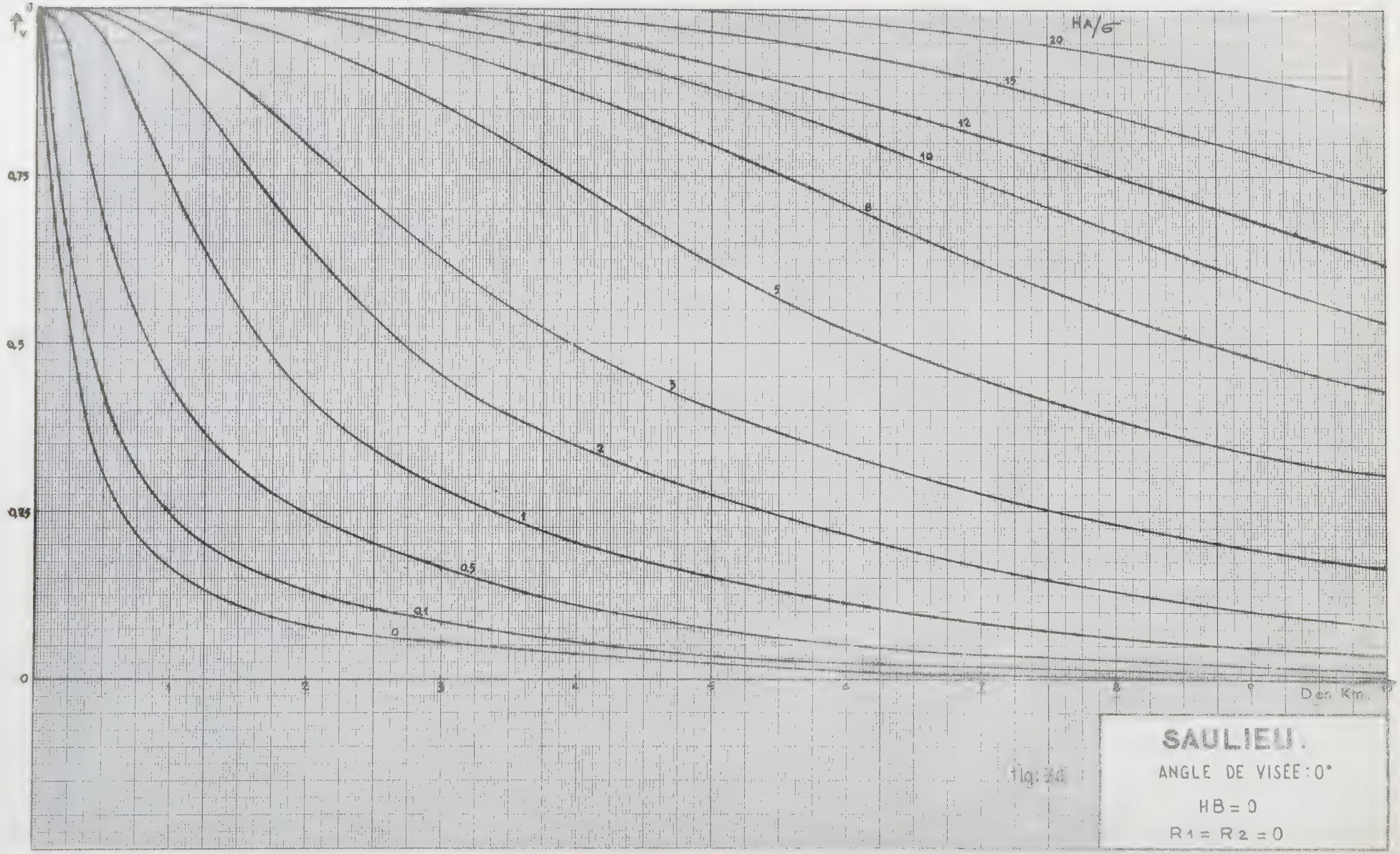
fig. 6.9

ORLEANS

ANGLE DE VISÉE : 0°

HB = 0

$R_1 = R_2 = 0$


HA/G
20
15
12
10
8
5
3
2
1
0.5
0.1
0
0.75
0.5
0.25
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Den Km.
SAULIEU.
ANGLE DE VISÉE : 0°
HB = 0
R1 = R2 = 0

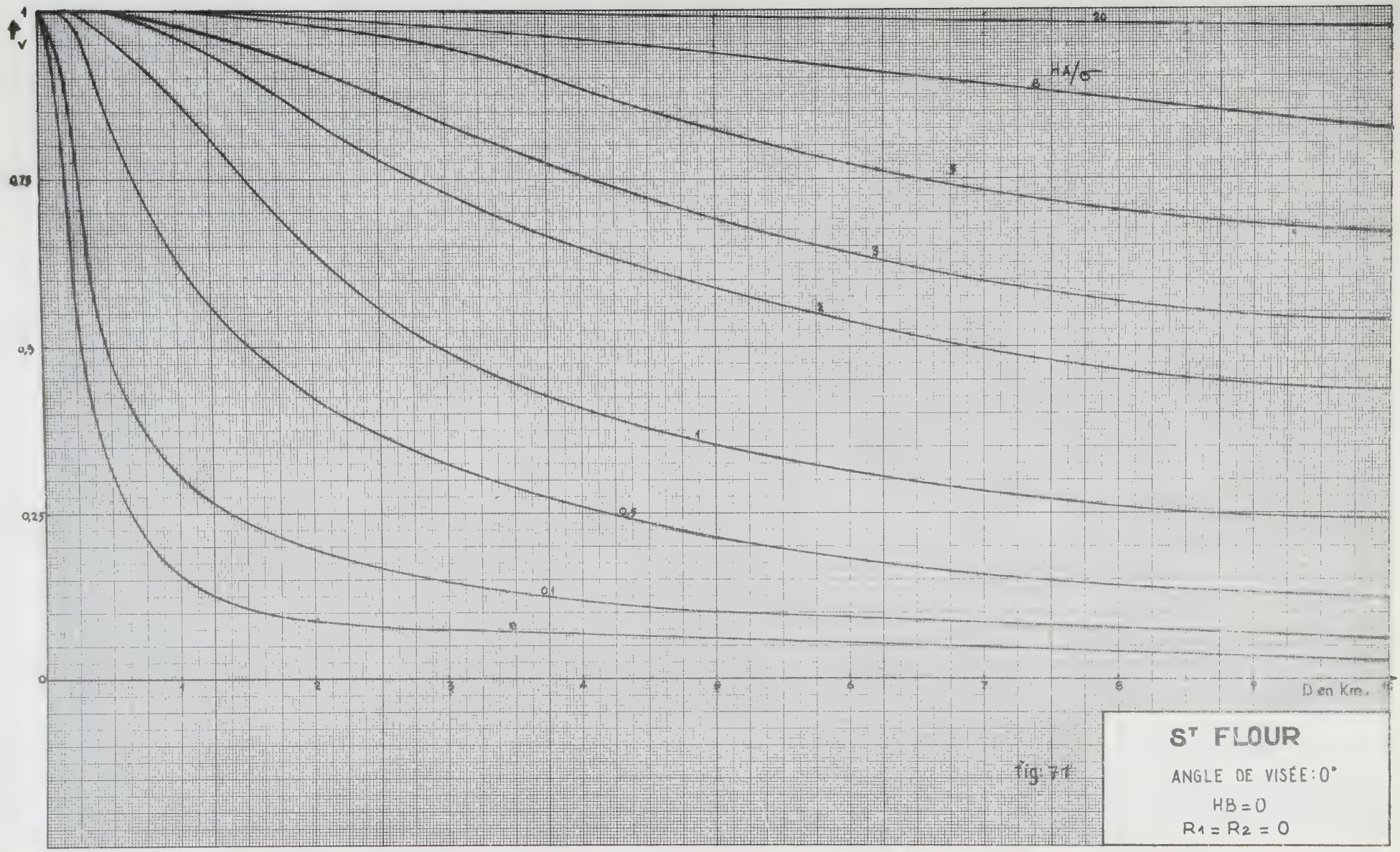


fig 71

S^T FLOUR

ANGLE DE VISÉE : 0°

HB = 0

$R_1 = R_2 = 0$

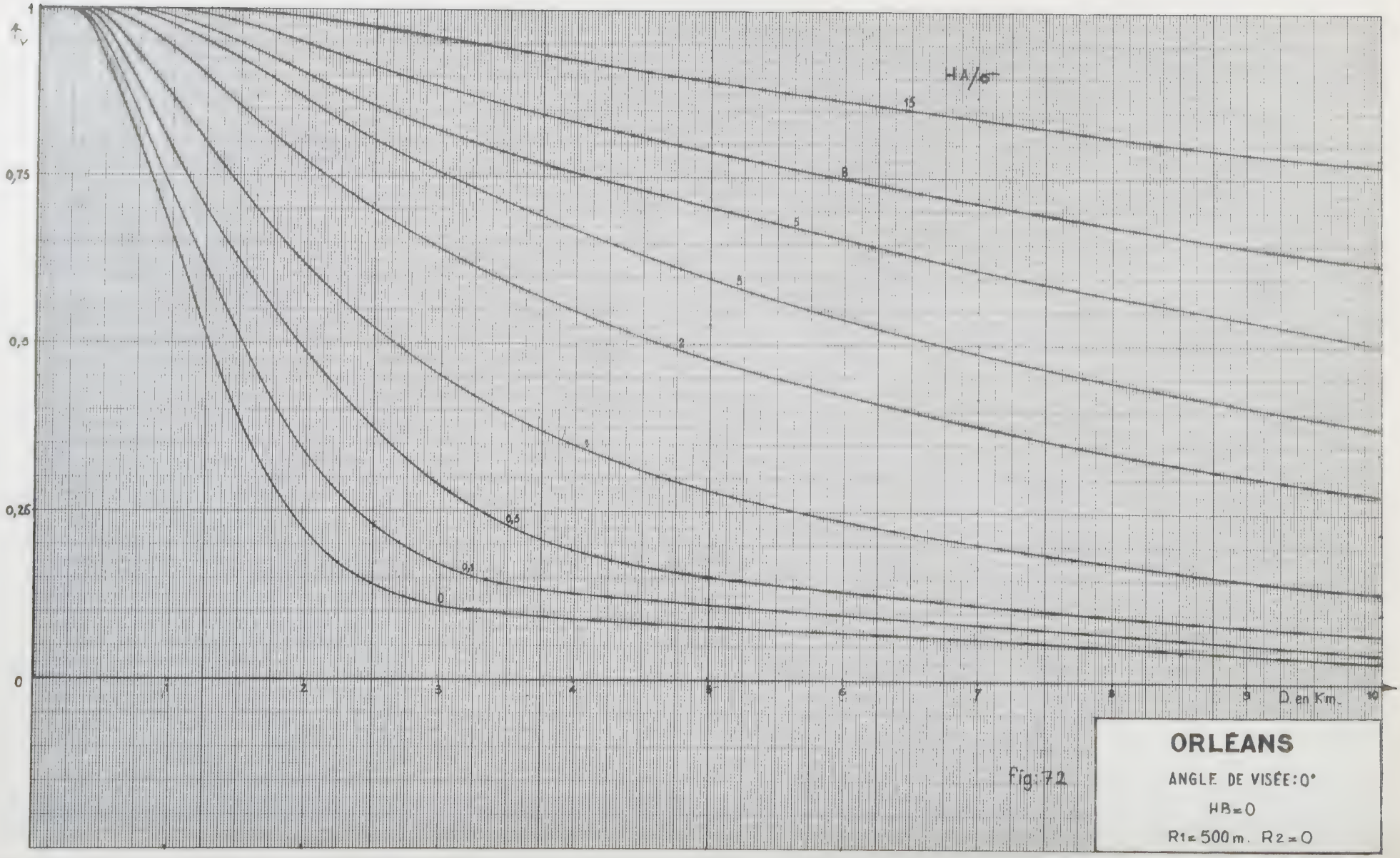


Fig. 72

ORLÉANS

ANGLE DE VISÉE: 0°

HB = 0

R1 = 500 m. R2 = 0

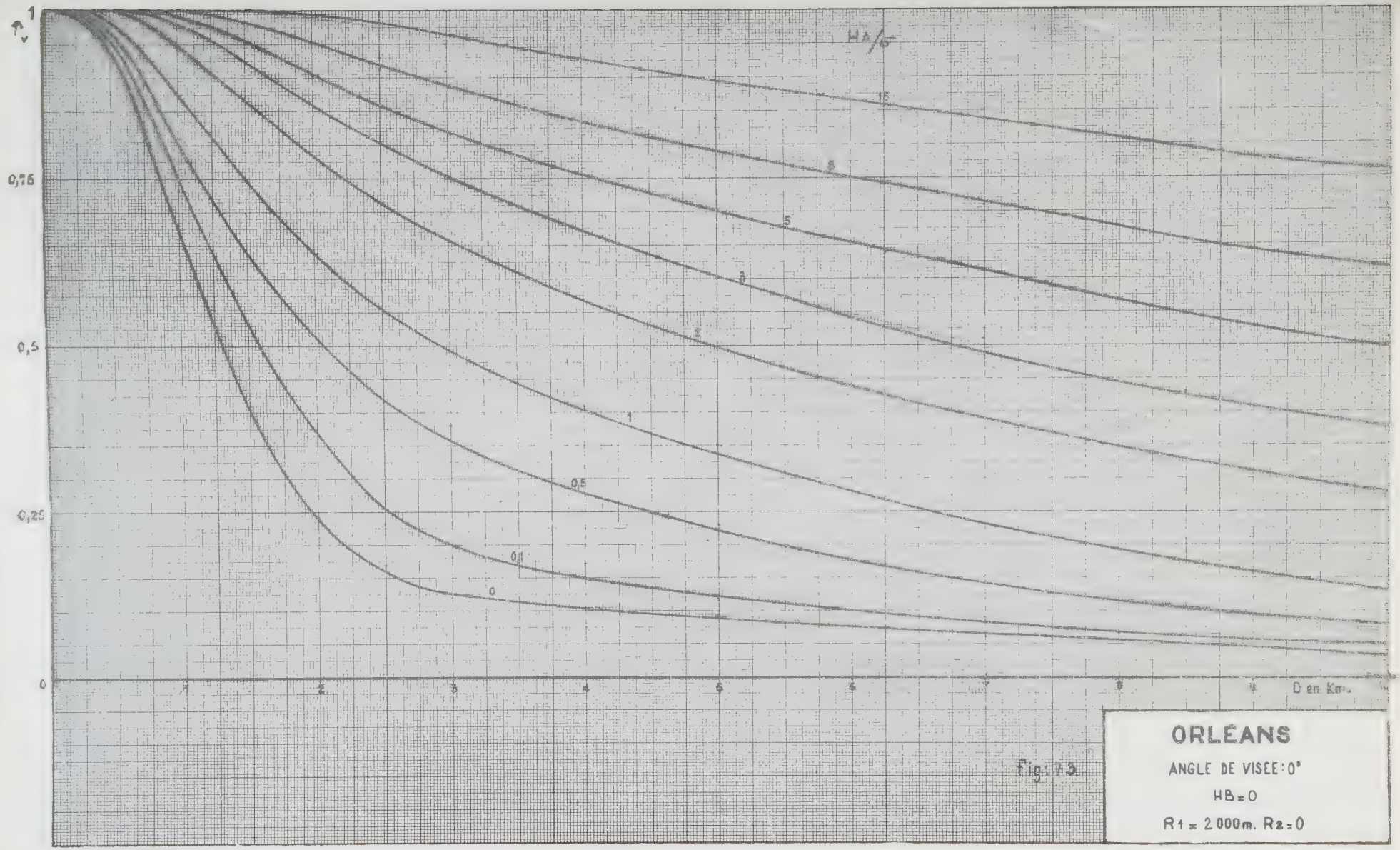
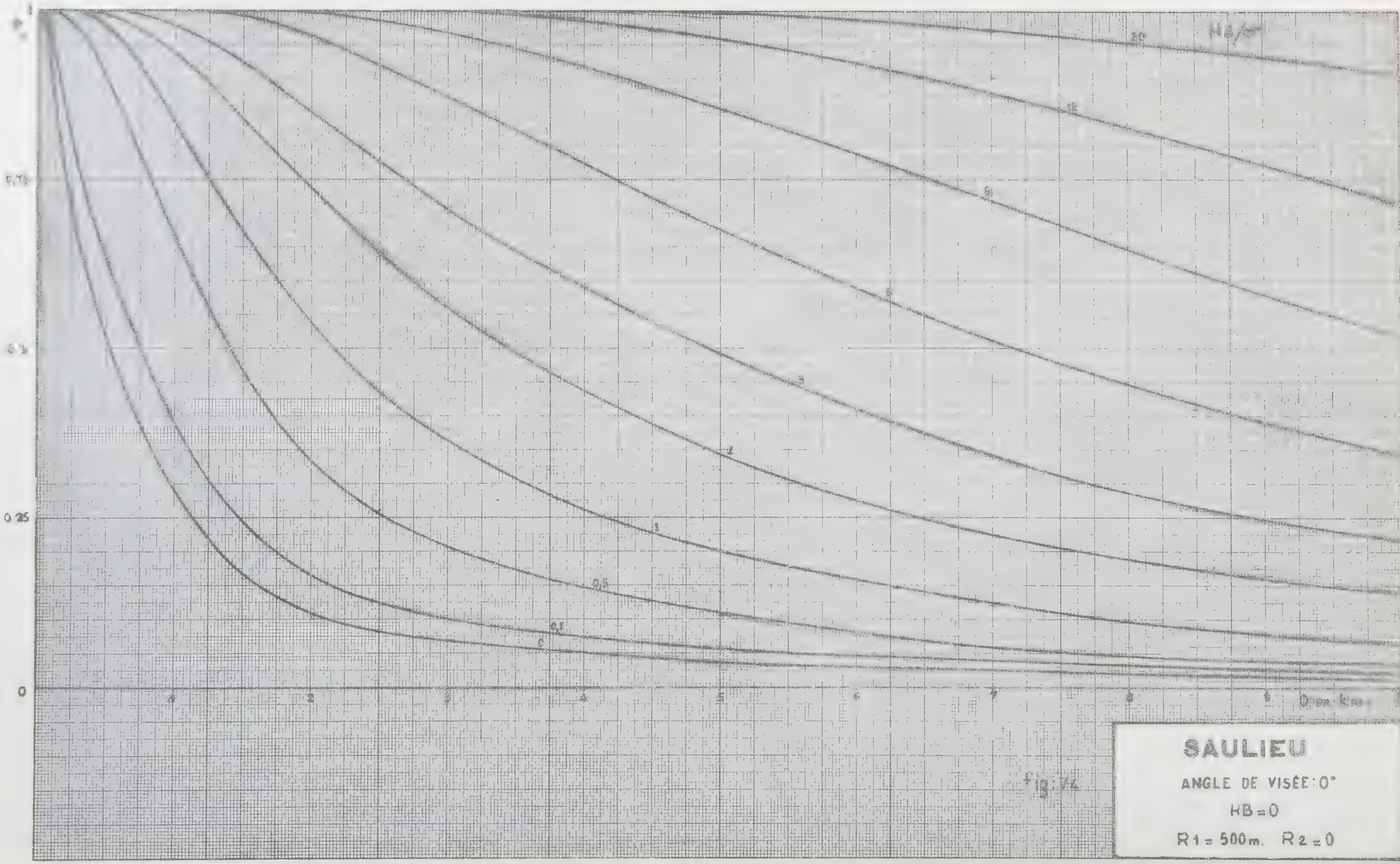
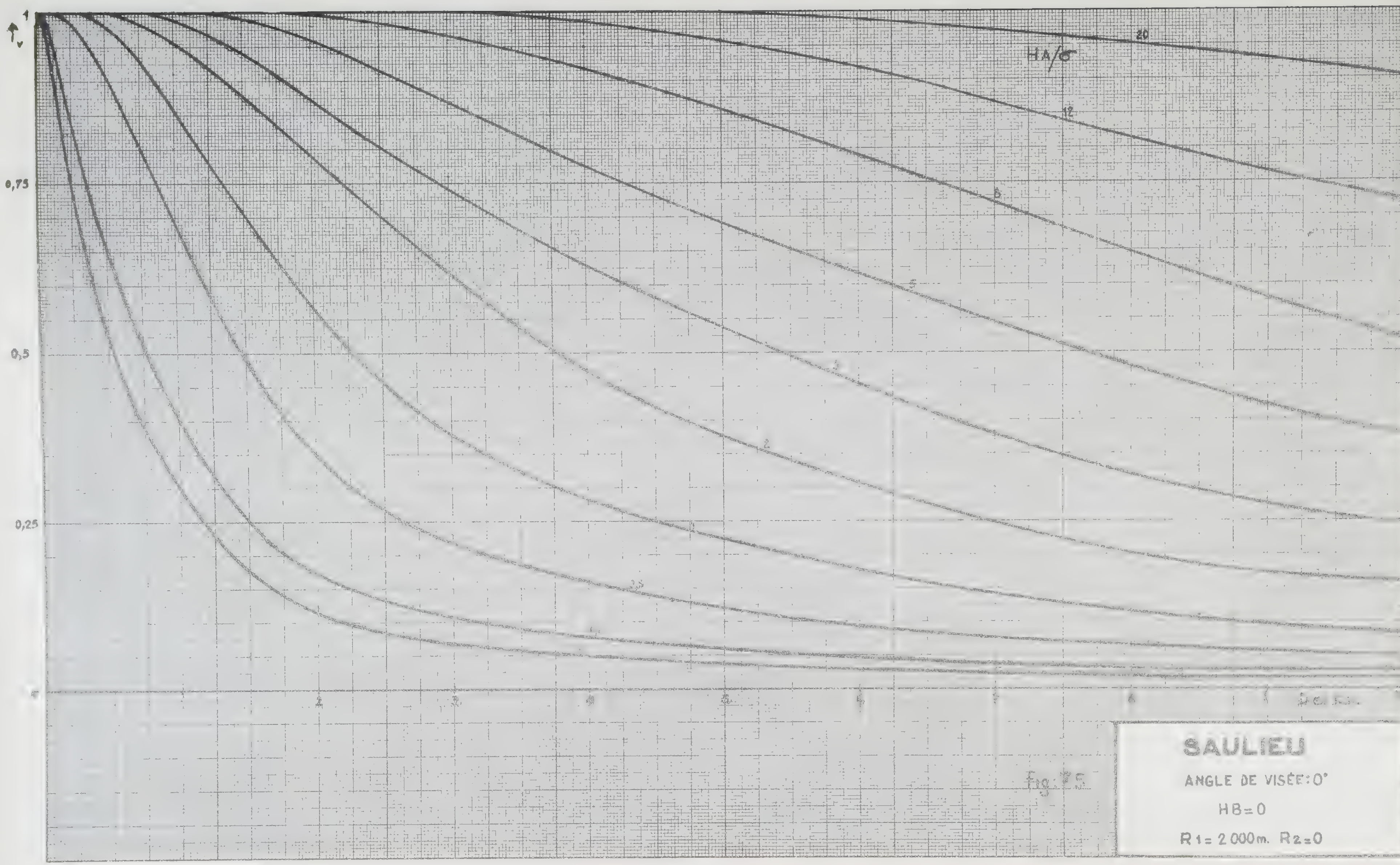

1
0,75
0,5
0,25
0
HA/λ
15
8
5
3
2
1
0,5
0,1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
D en Km
ORLÉANS
ANGLE DE VISEE : 0°
HB = 0
R1 = 2.000m. R2 = 0

Fig. 75


SAULIEU
ANGLE DE VISÉE : 0°
HB = 0
R1 = 500 m. R2 = 0
D en km
0
0.25
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0,5
1
2
3
5
9
15
20
Fig. 74


SAULIEU
ANGLE DE VISÉE: 0°
HB=0
R1= 2 000m. R2=0
HA/σ
20
12
6
5
3
2
1
0,75
0,5
0,25

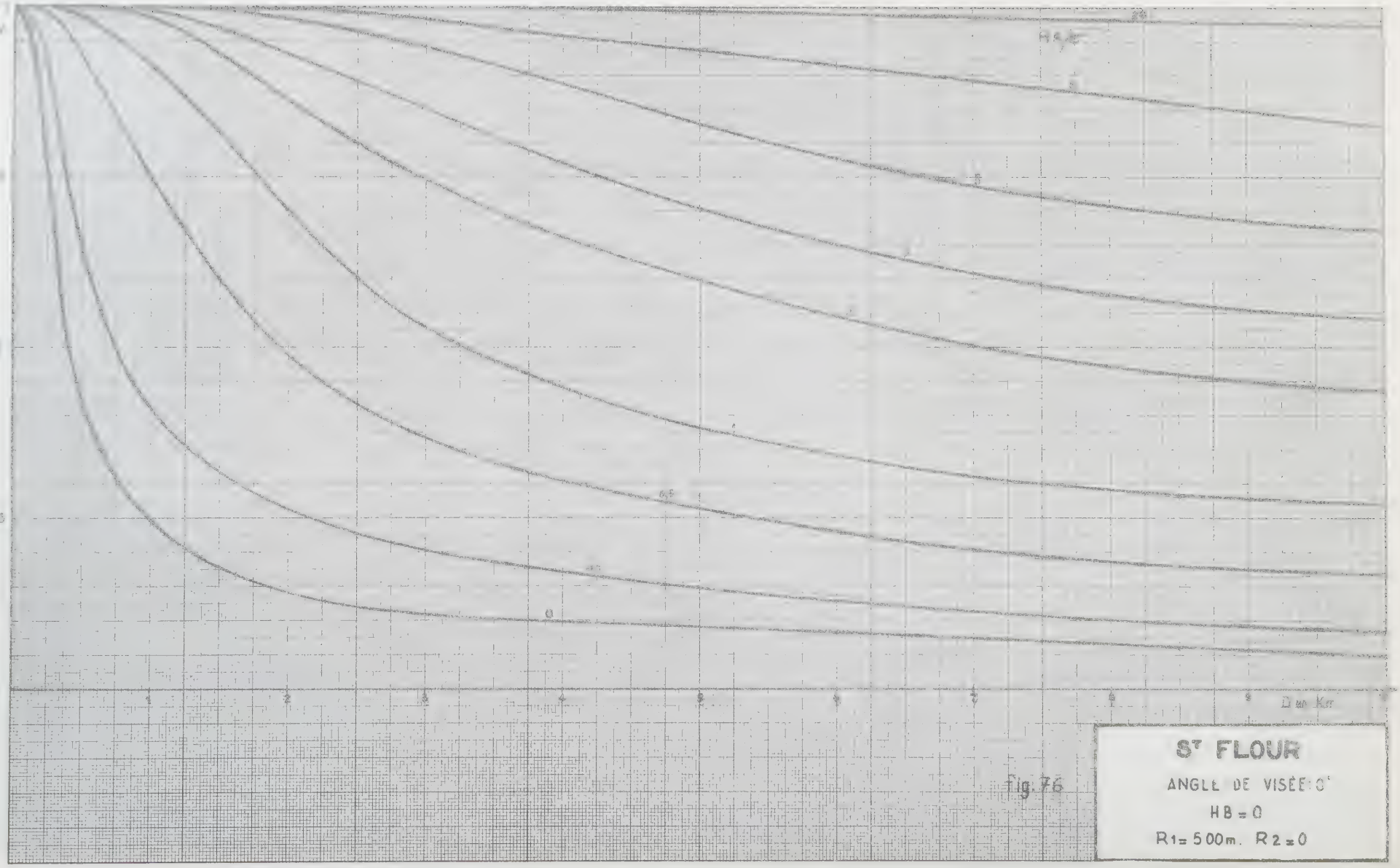


Fig. 76

St FLOUR

ANGLE DE VISÉE: 0°

HB = 0

R1 = 500m. R2 = 0

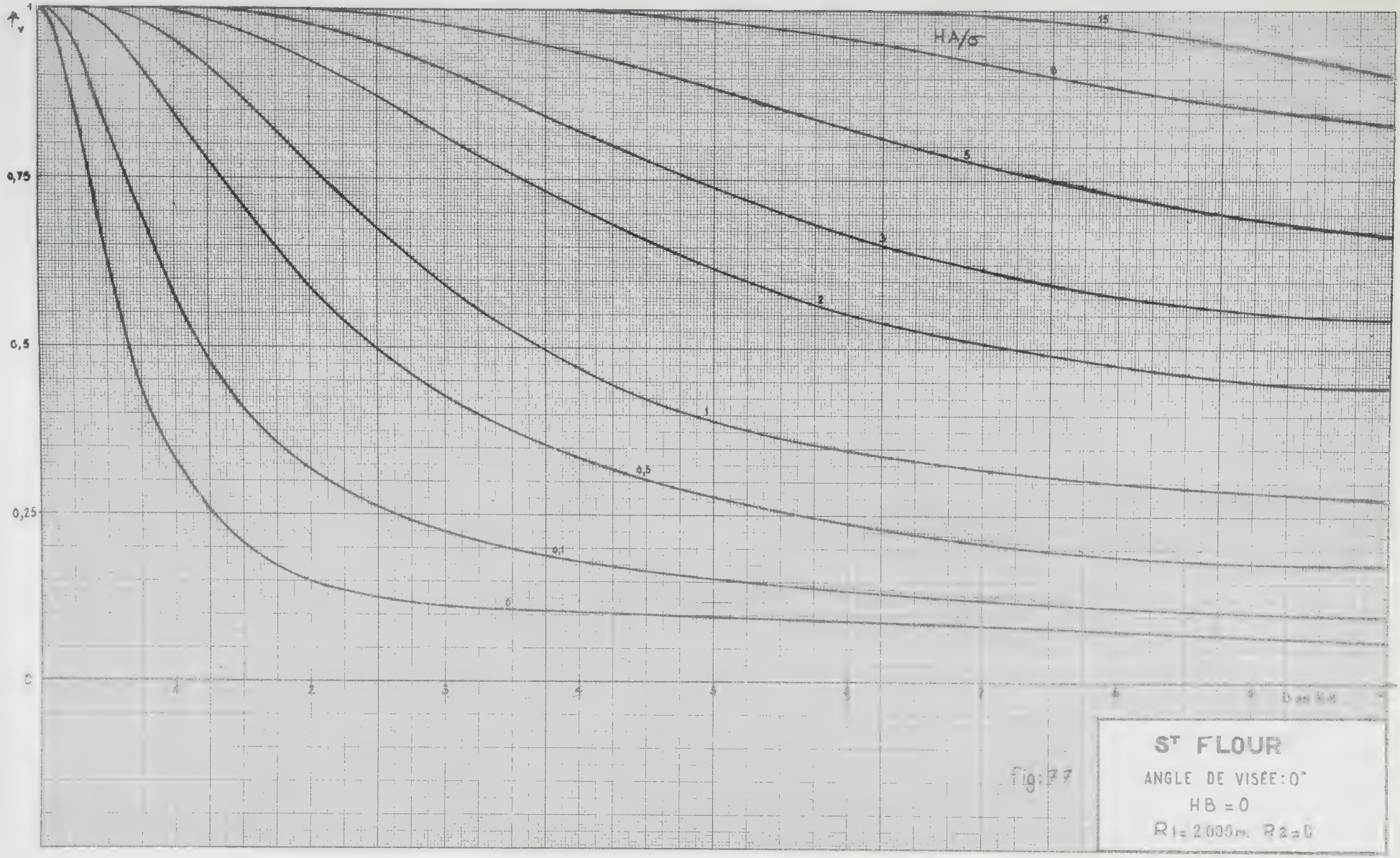


Fig: 77

St FLOUR

ANGLE DE VISÉE : 0°

HB = 0

R1 = 2000m. R2 = 0

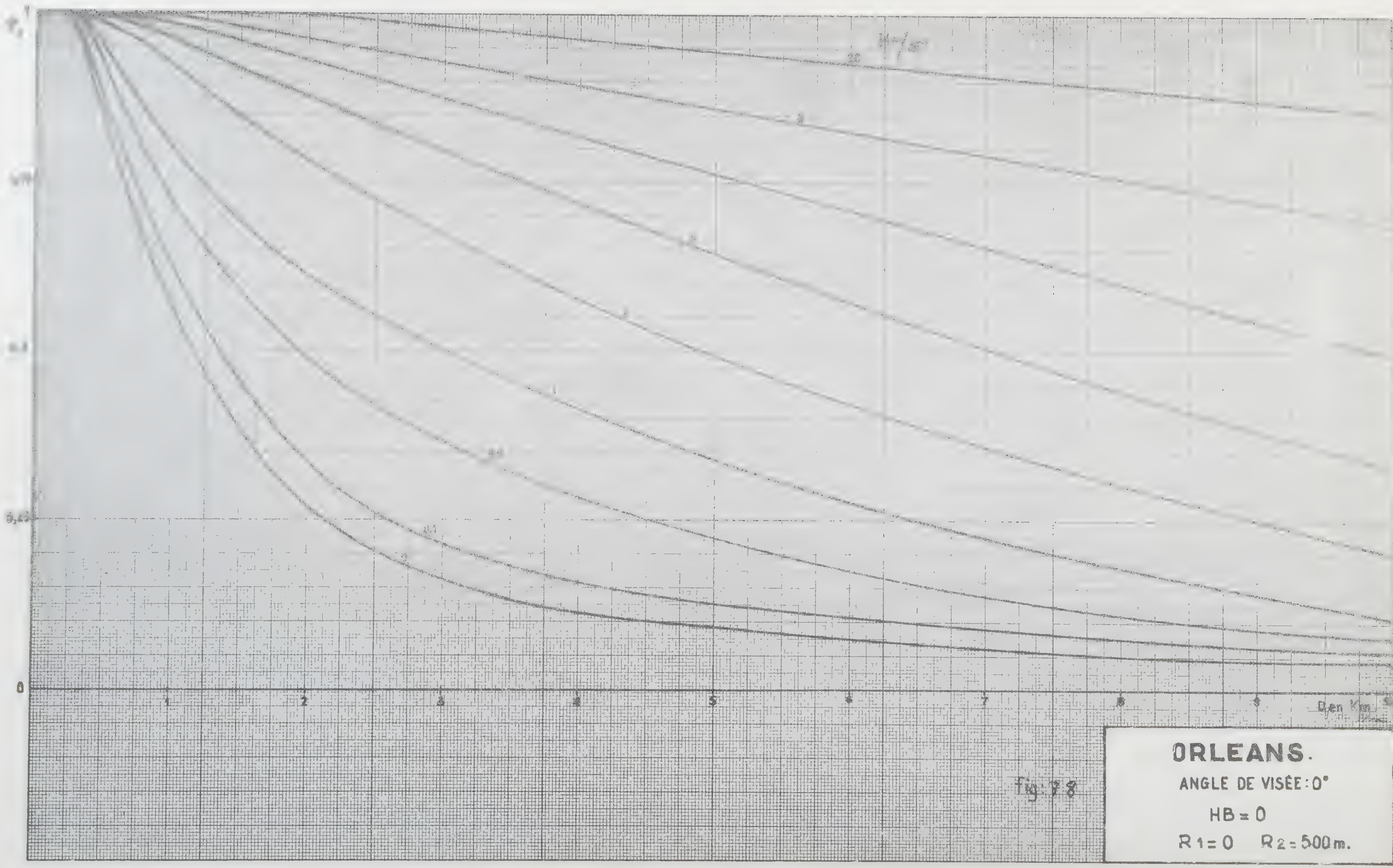

ORLEANS.
ANGLE DE VISÉE : 0°
HB = 0
R1 = 0 R2 = 500 m.
D en Km
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0,25

Fig. 78

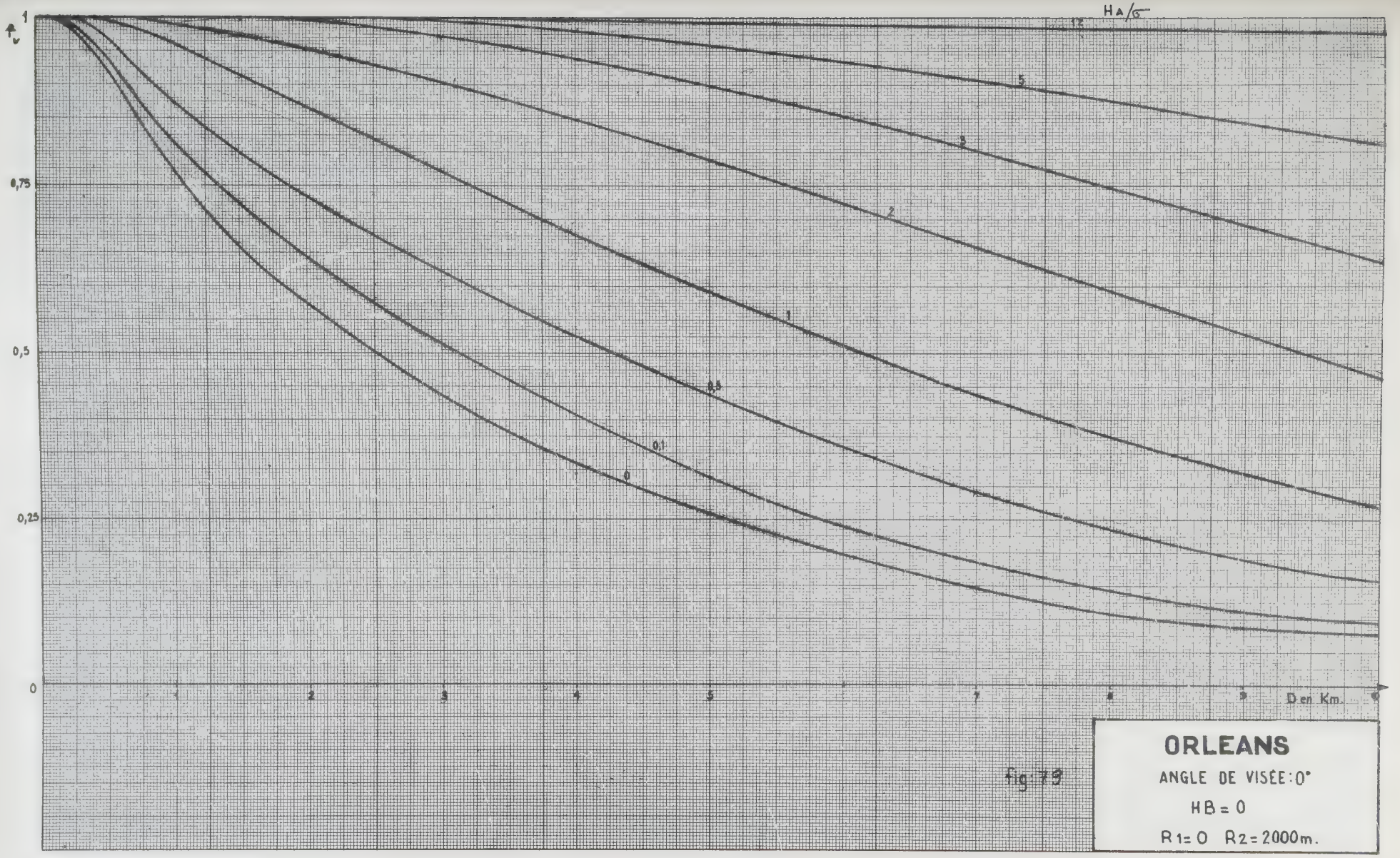


fig: 73

ORLEANS

ANGLE DE VISÉE: 0°

HB = 0

R1 = 0 R2 = 2000m.

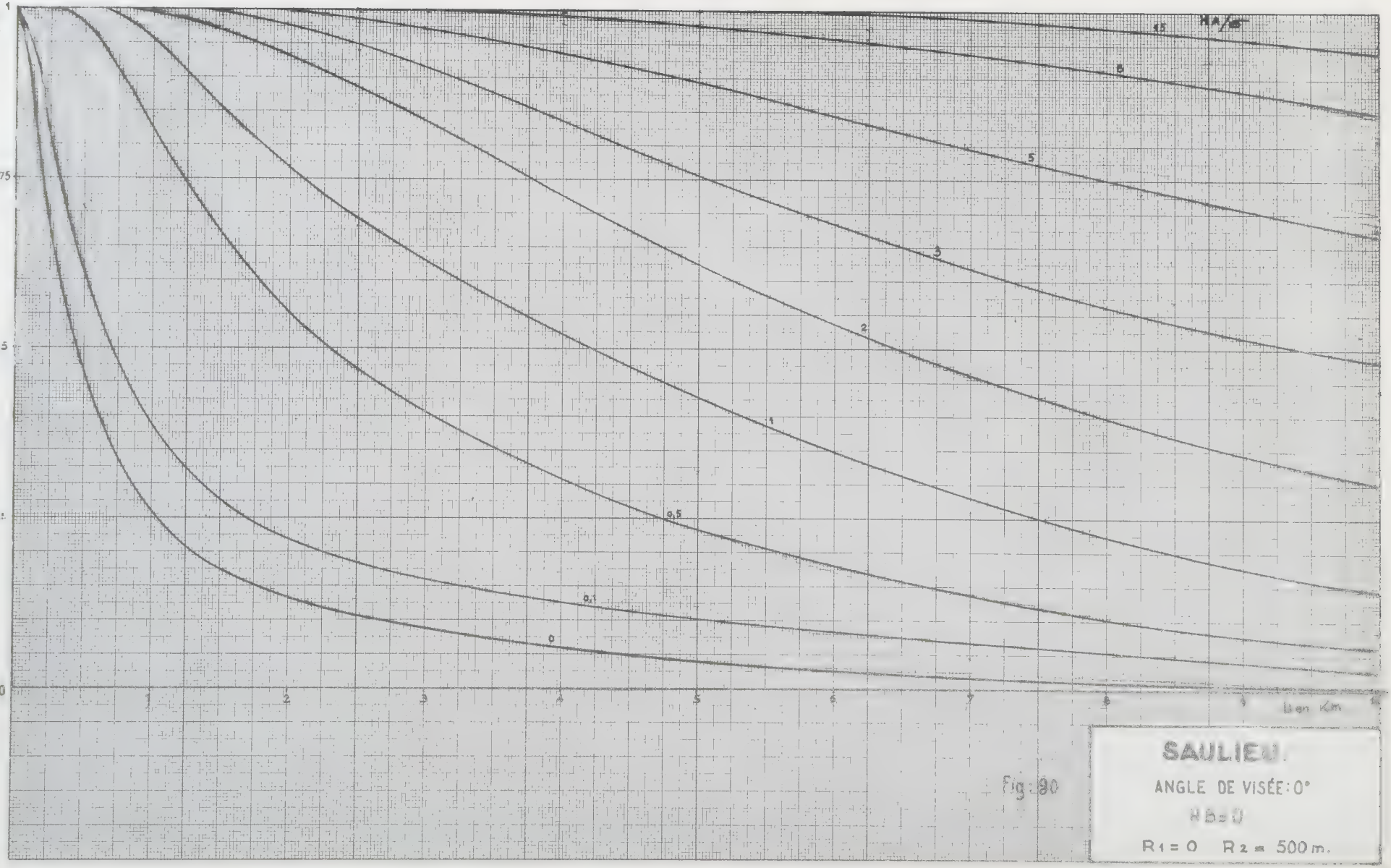

1
0,75
0,5
0,25
0
15
8
5
3
2
1
0,5
0,1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Km
SAULIEU
ANGLE DE VISÉE: 0°
HB=0
R1 = 0 R2 = 500 m.

Fig : 90

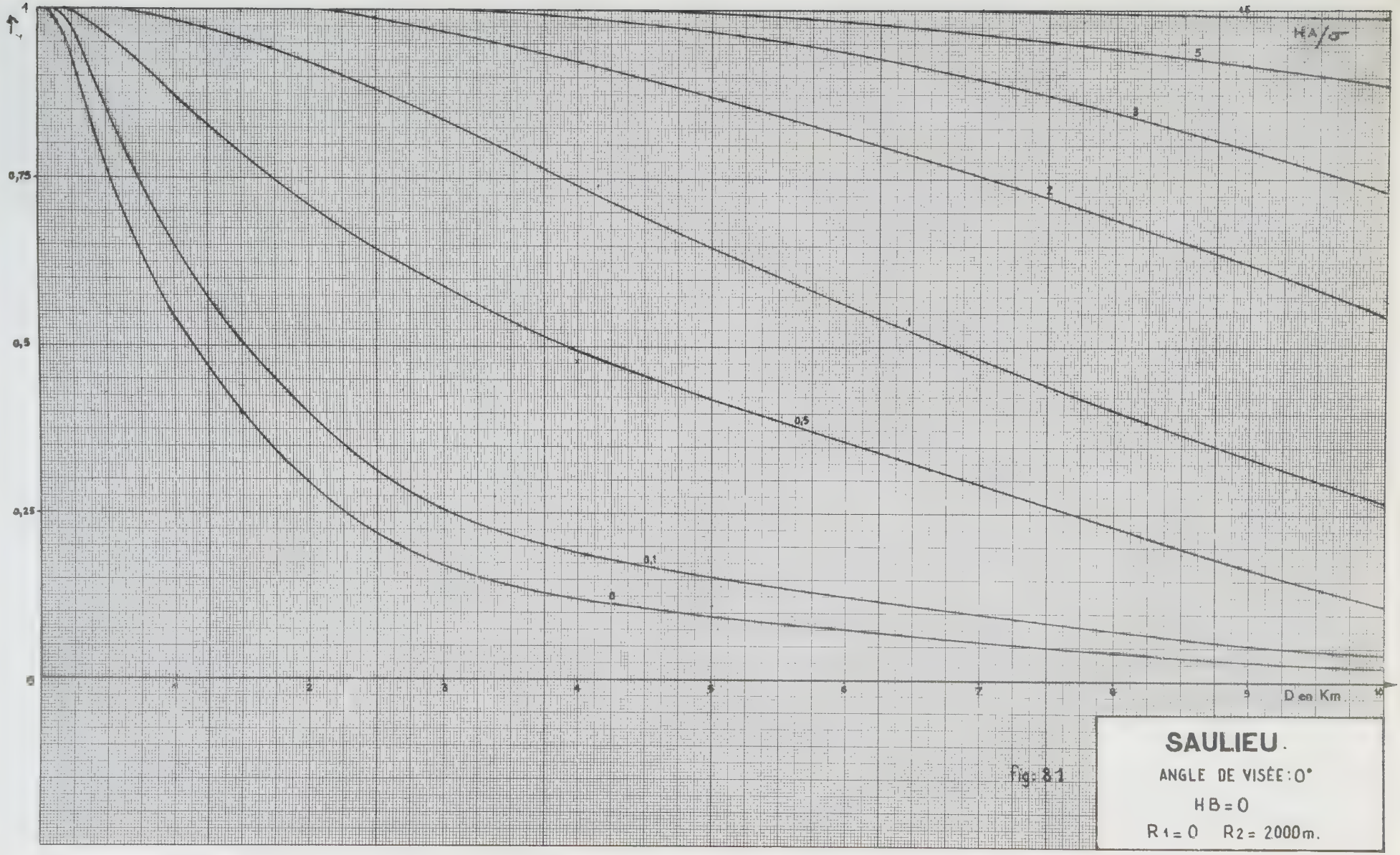


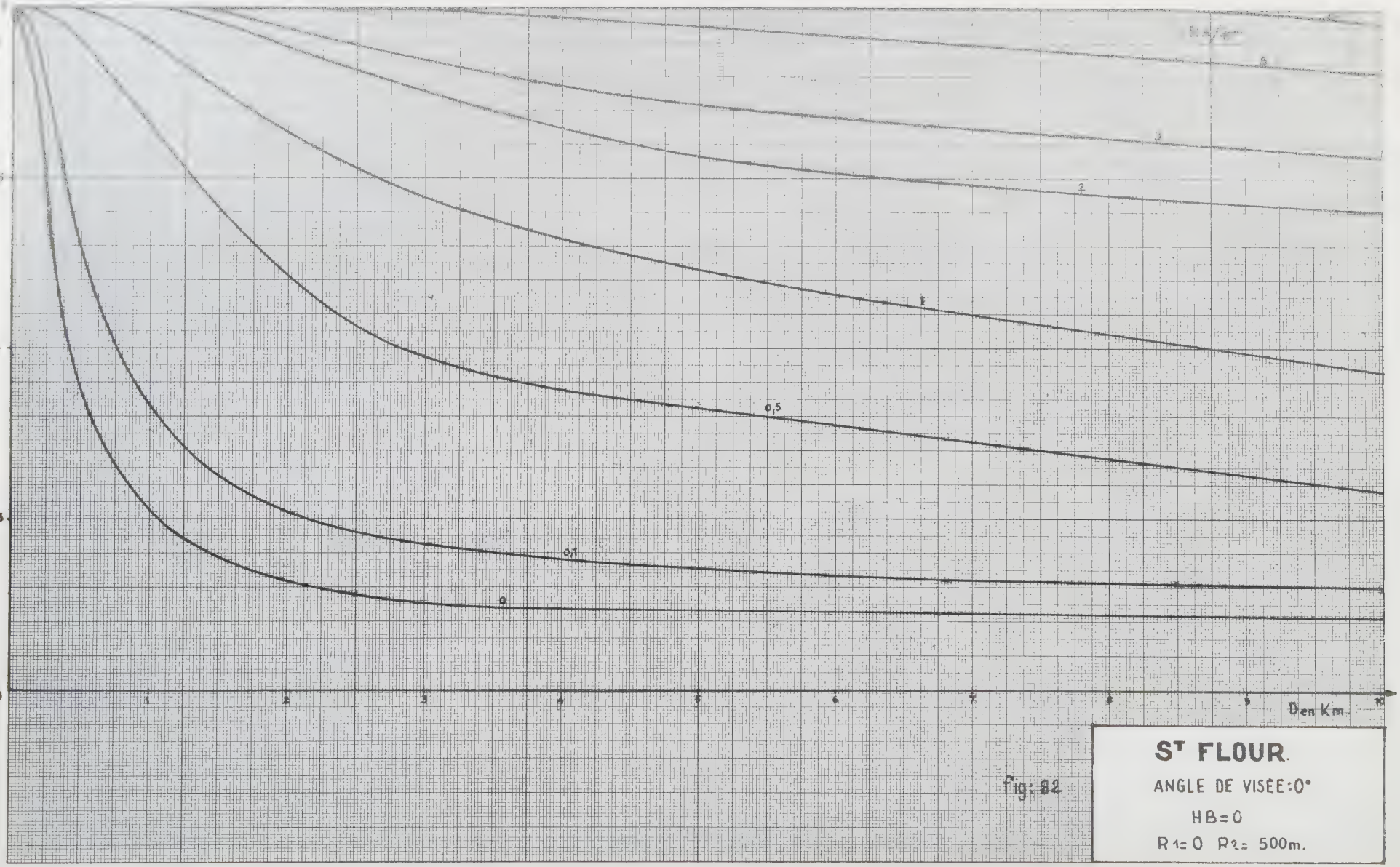
Fig. 8.1

SAULIEU.

ANGLE DE VISÉE : 0°

HB = 0

R1 = 0 R2 = 2000m.



ST FLOUR.

ANGLE DE VISÉE: 0°

HB = 0

R1 = 0 R2 = 500m.

fig: 32

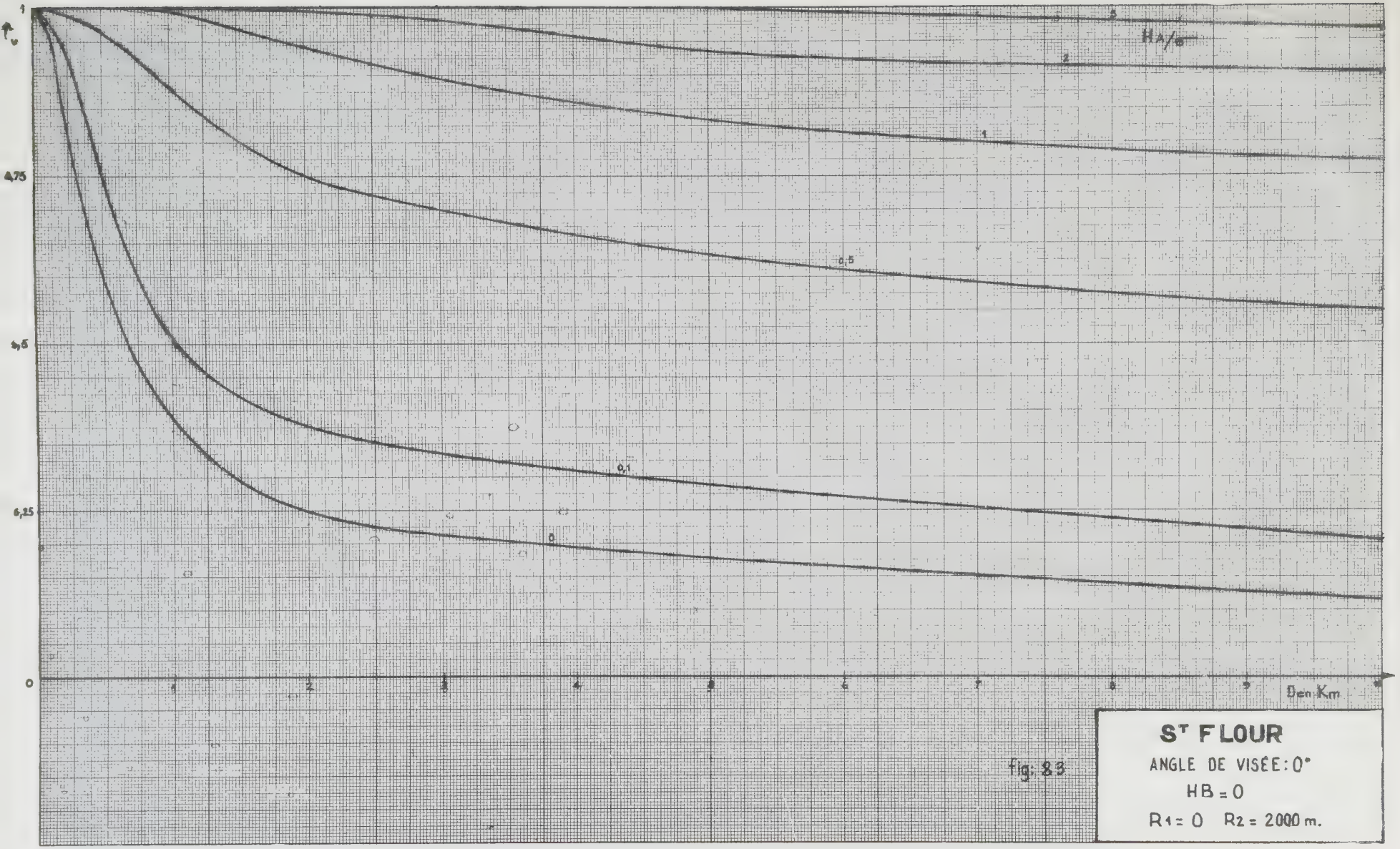


fig: 83

ST FLOUR

ANGLE DE VISÉE: 0°

HB = 0

R1 = 0 R2 = 2000 m.

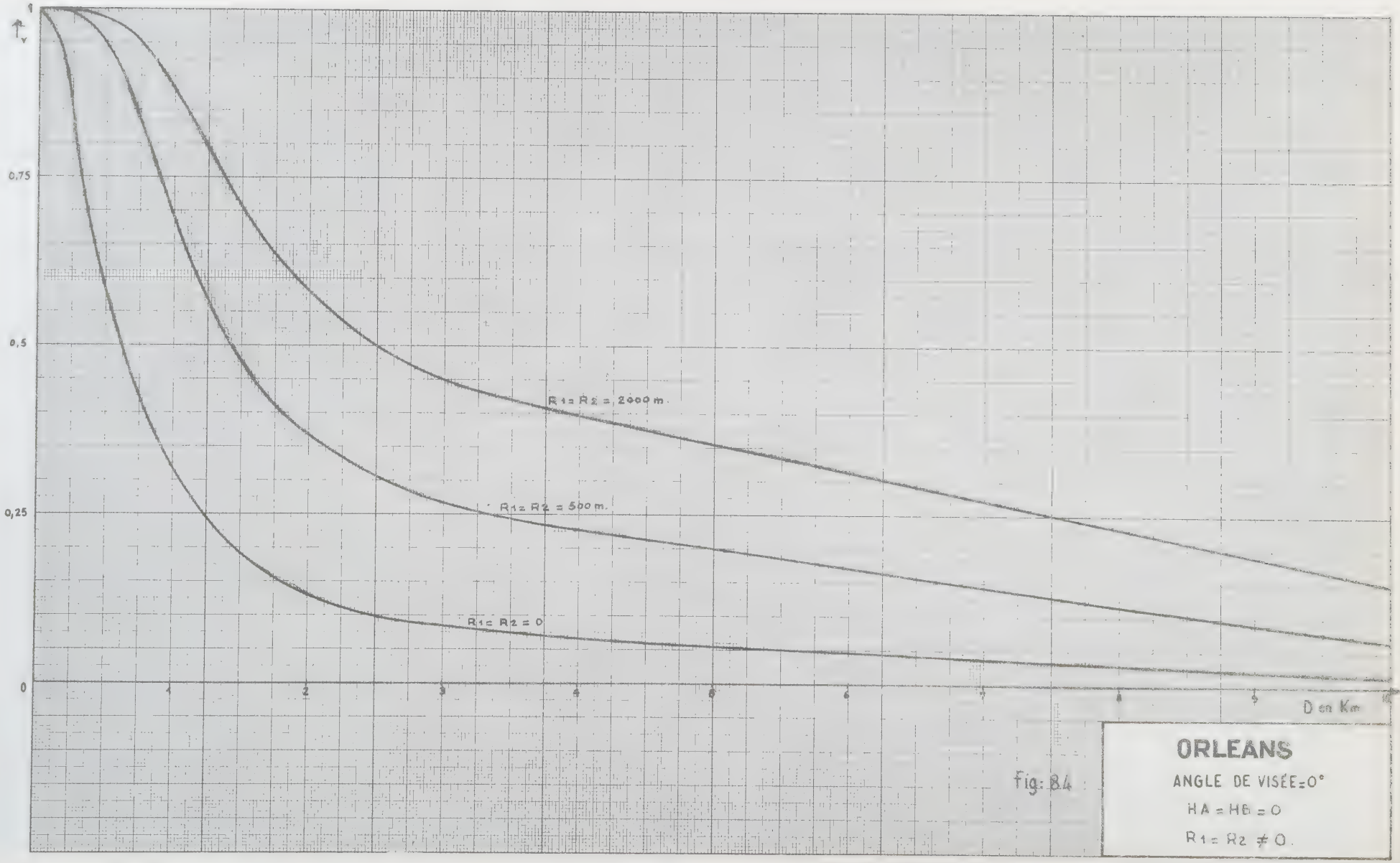


Fig: 84

ORLEANS

ANGLE DE VISÉE = 0°

HA = HB = 0

R1 = R2 ≠ 0.

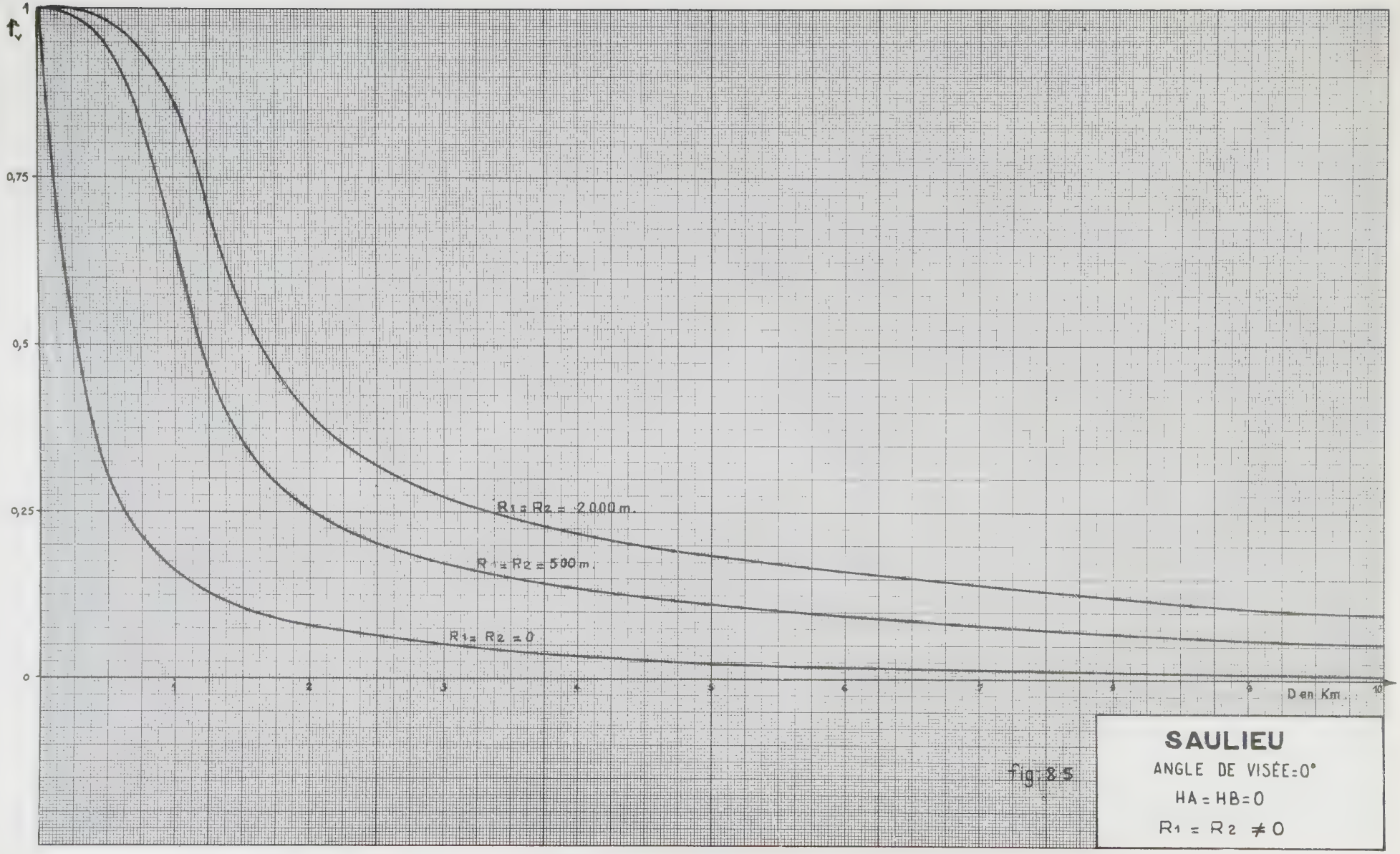


fig. 85

SAULIEU

ANGLE DE VISÉE = 0°

HA = HB = 0

$R_1 = R_2 \neq 0$

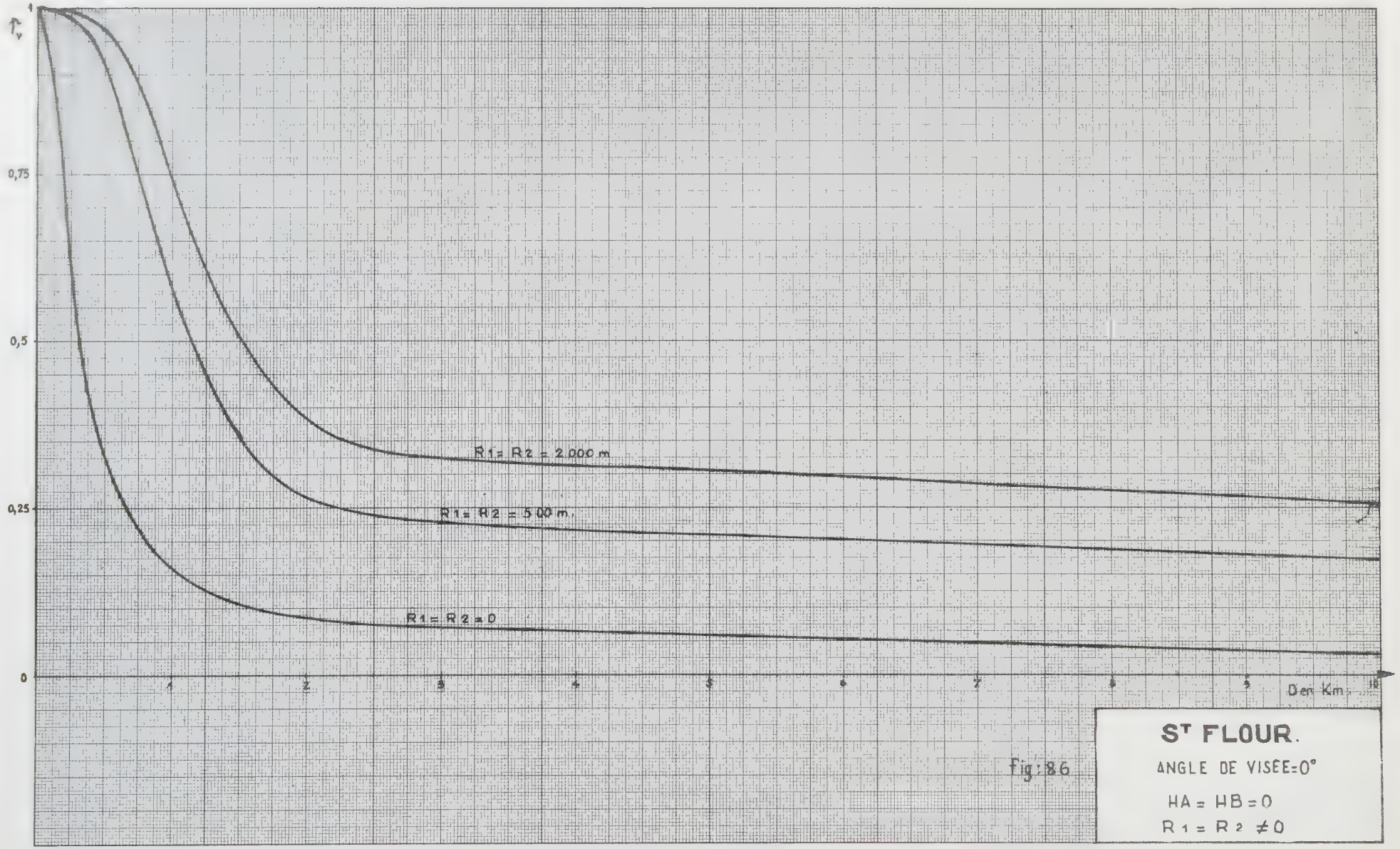


Fig: 86

S^T FLOUR.

ANGLE DE VISÉE=0°

HA = HB = 0

R 1 = R 2 ≠ 0

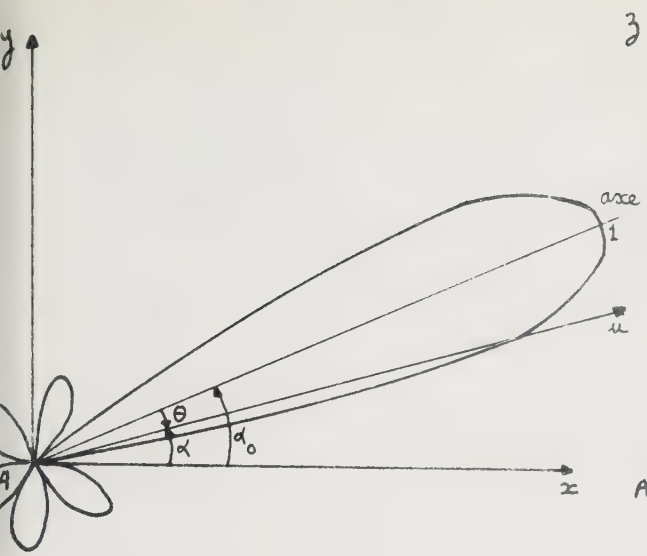


Fig 87a

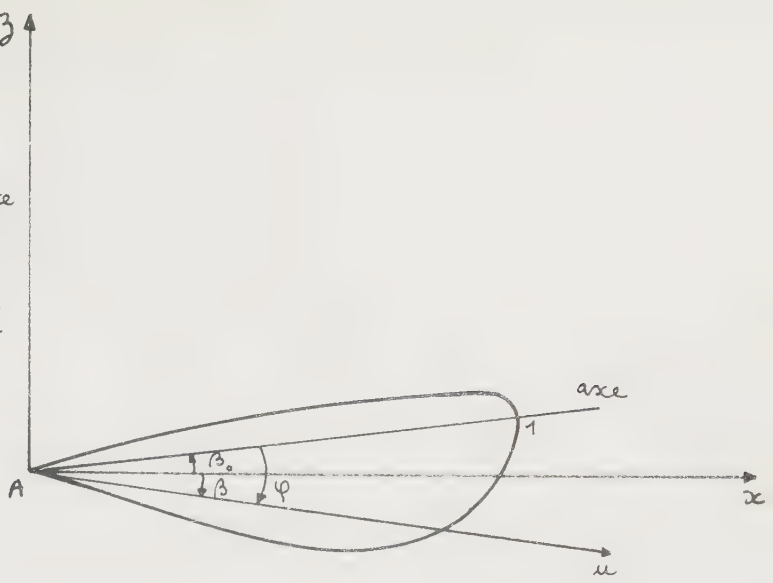


Fig 87b

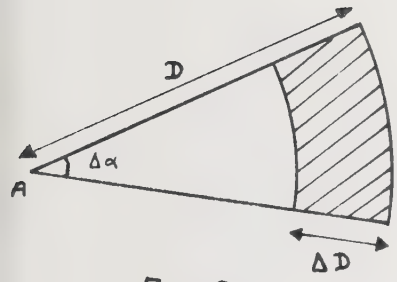


Fig 88

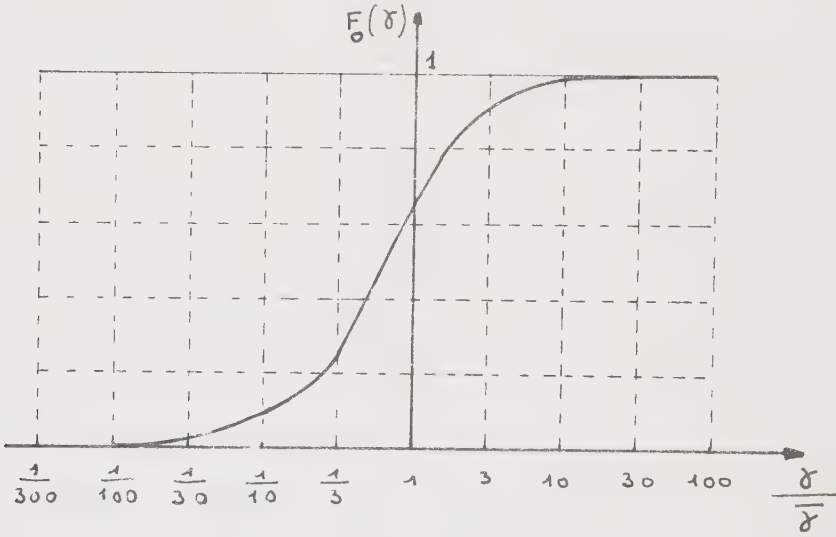


Fig 89

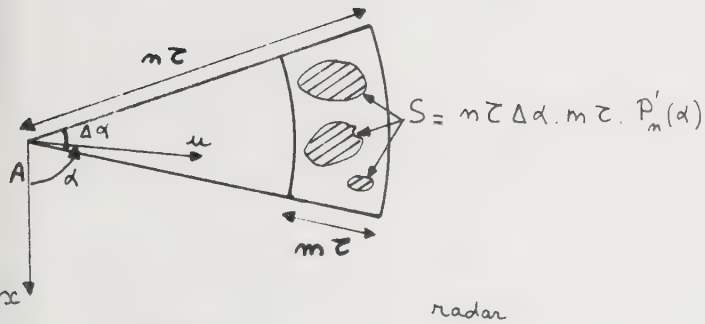


Fig 90

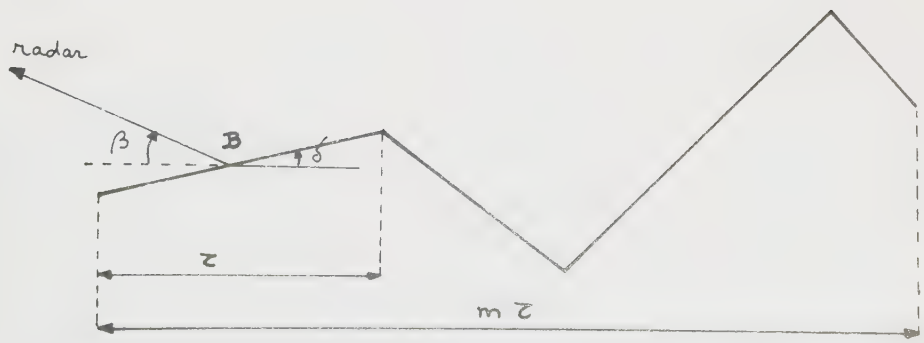


Fig 91

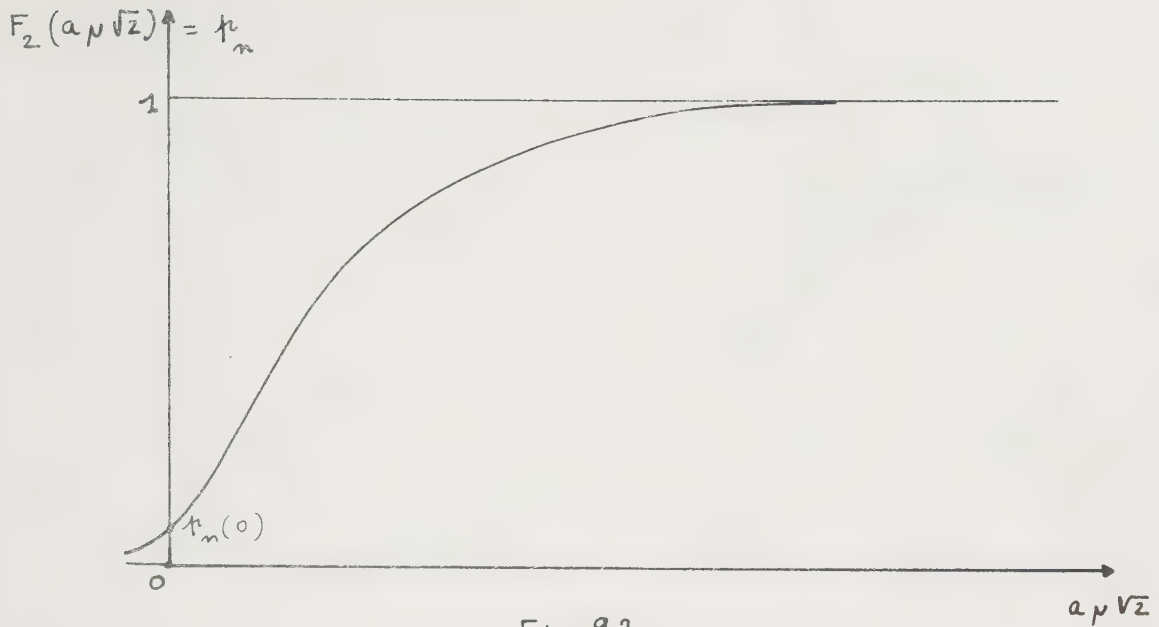


Fig 92 a

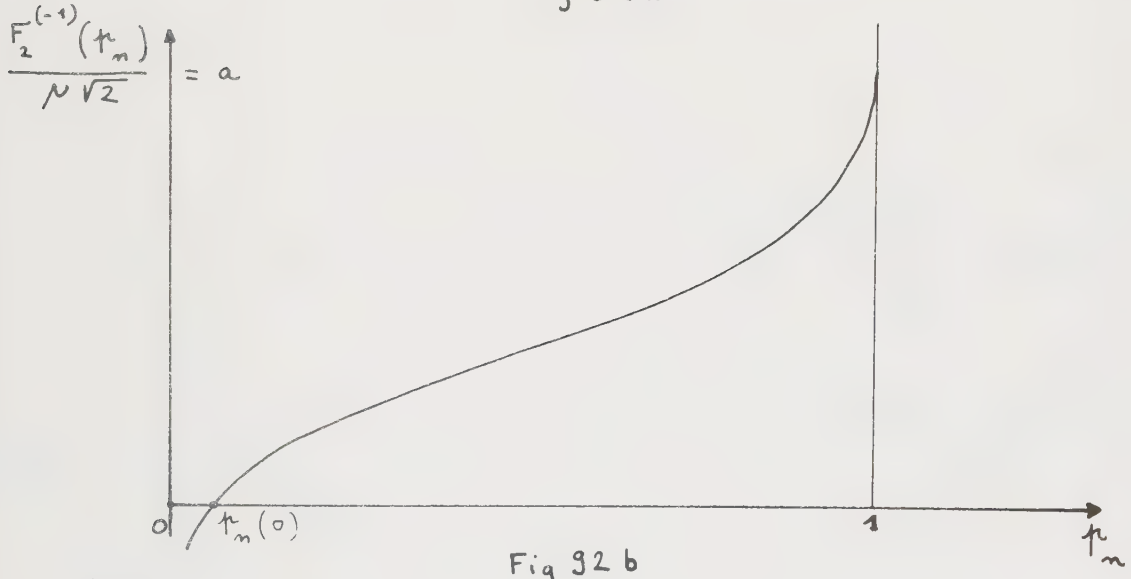


Fig 92 b

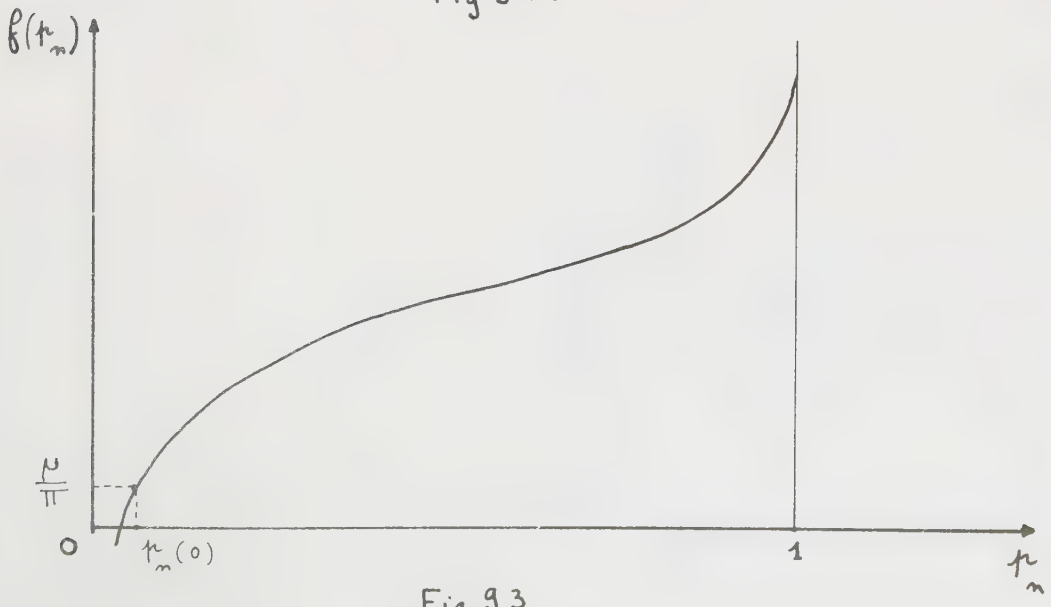


Fig 93

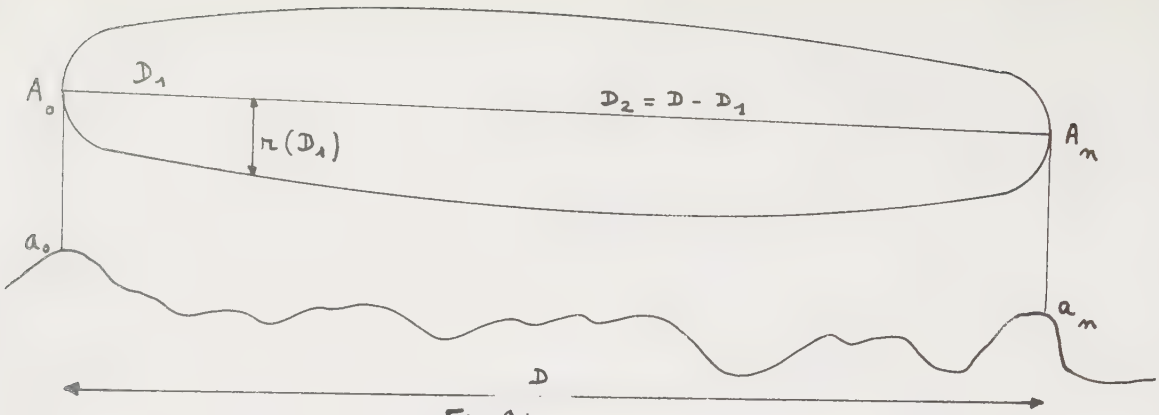


Fig 94

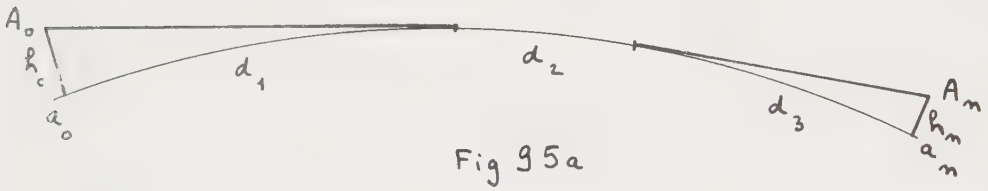


Fig 95a

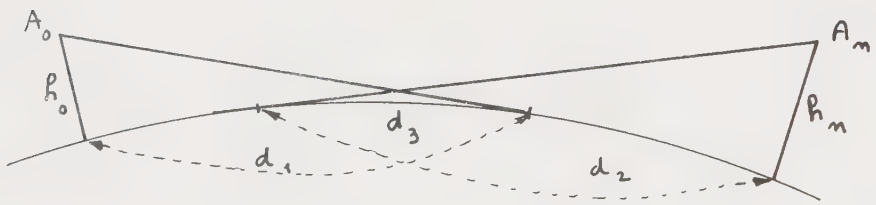


Fig 95b

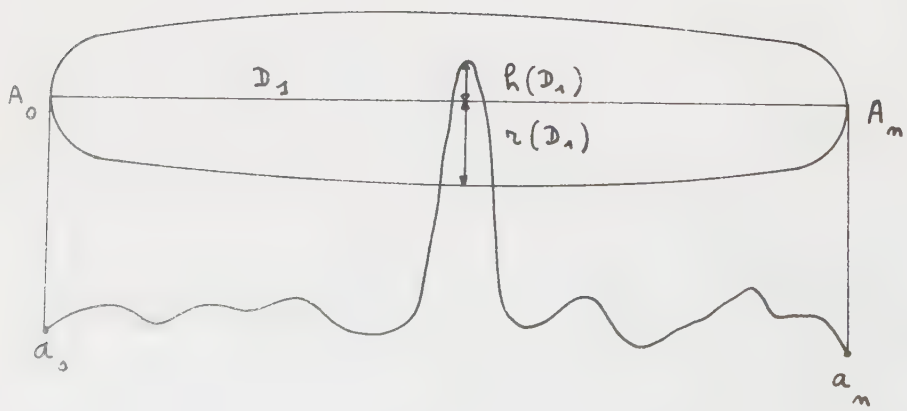


Fig 96

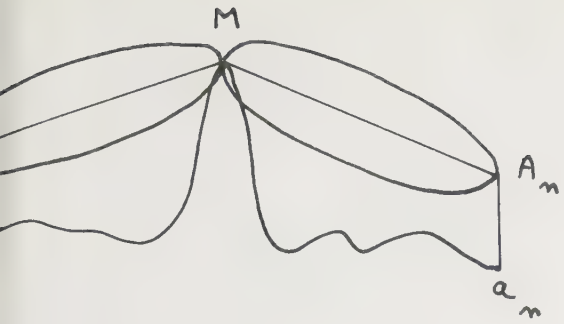


Fig 97

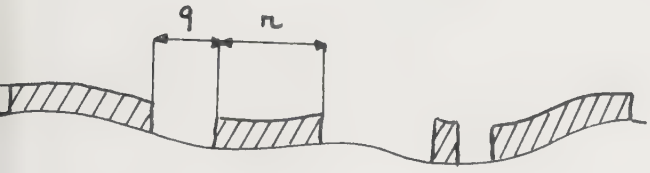


Fig 99

(e)

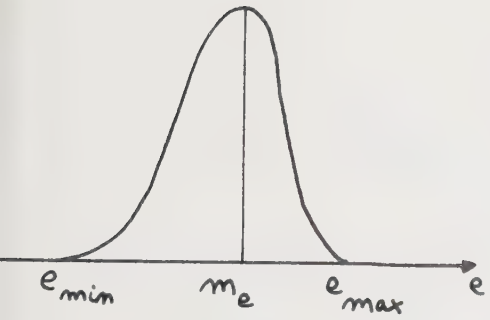


Fig 100

Fig 102

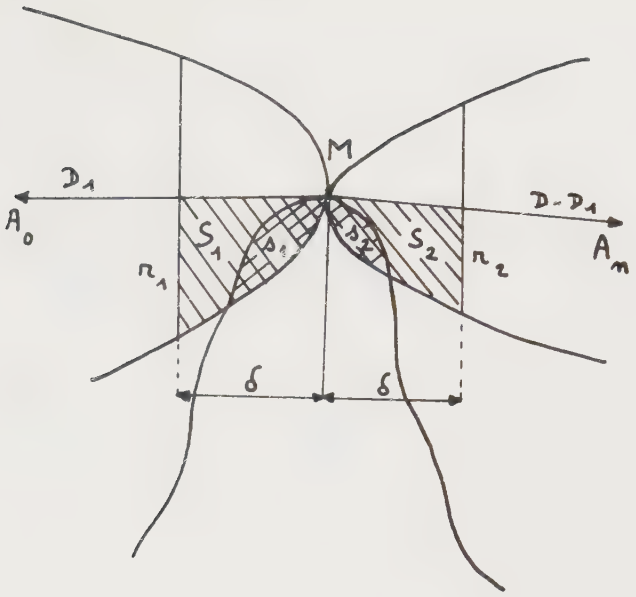


Fig 98

Fig 101

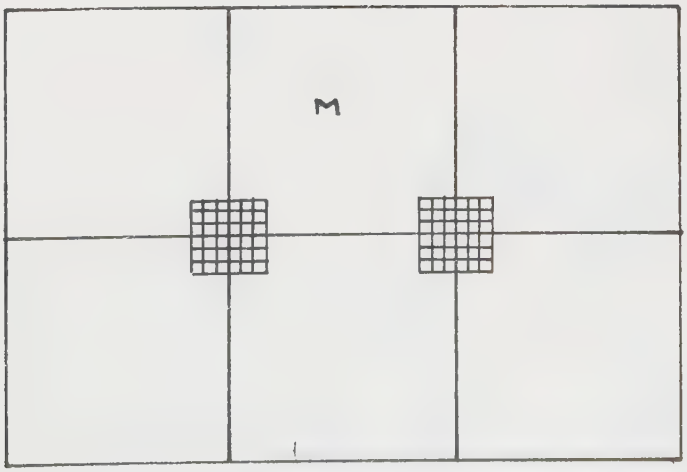


Fig 103

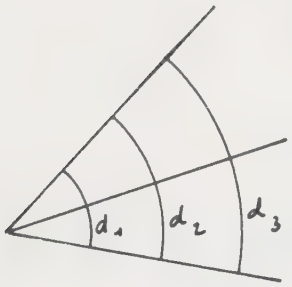


Fig 104

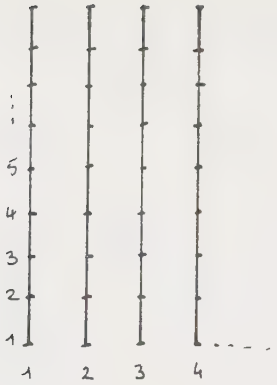


Fig 105

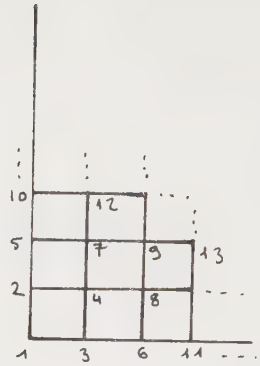


Fig 106

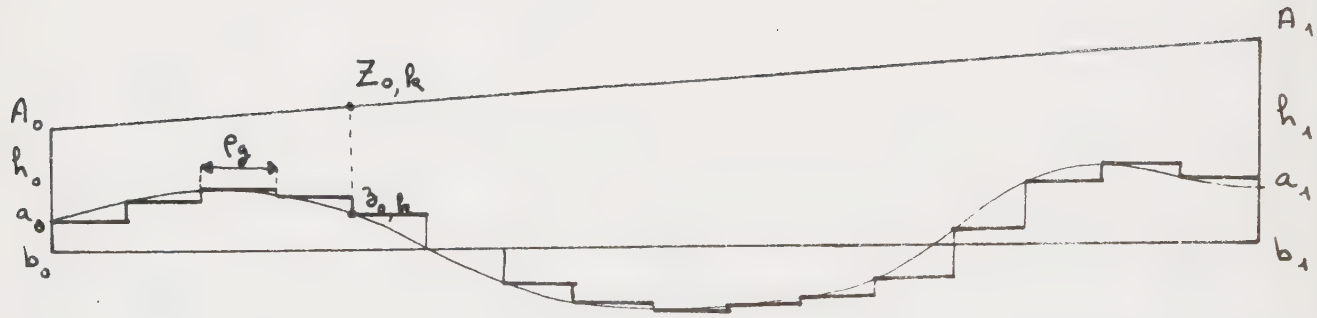


Fig 107

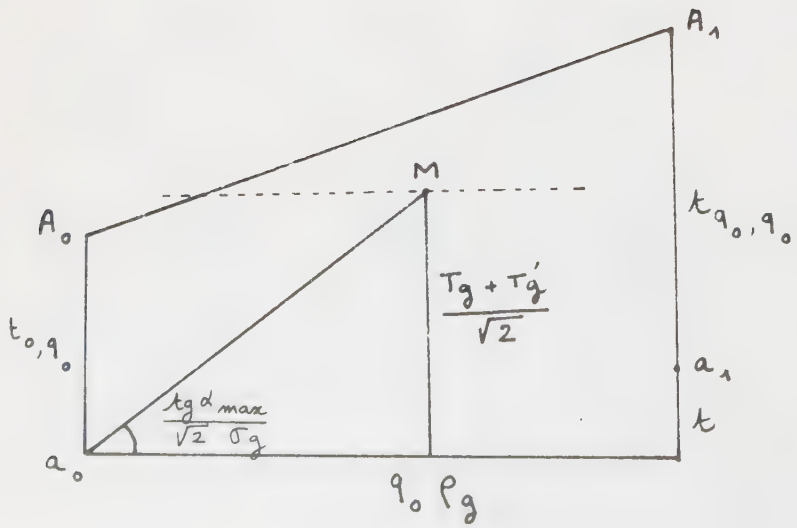


Fig 108

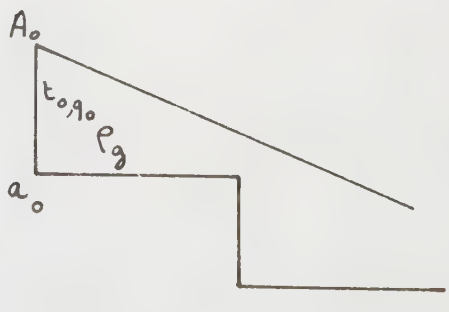


Fig 109

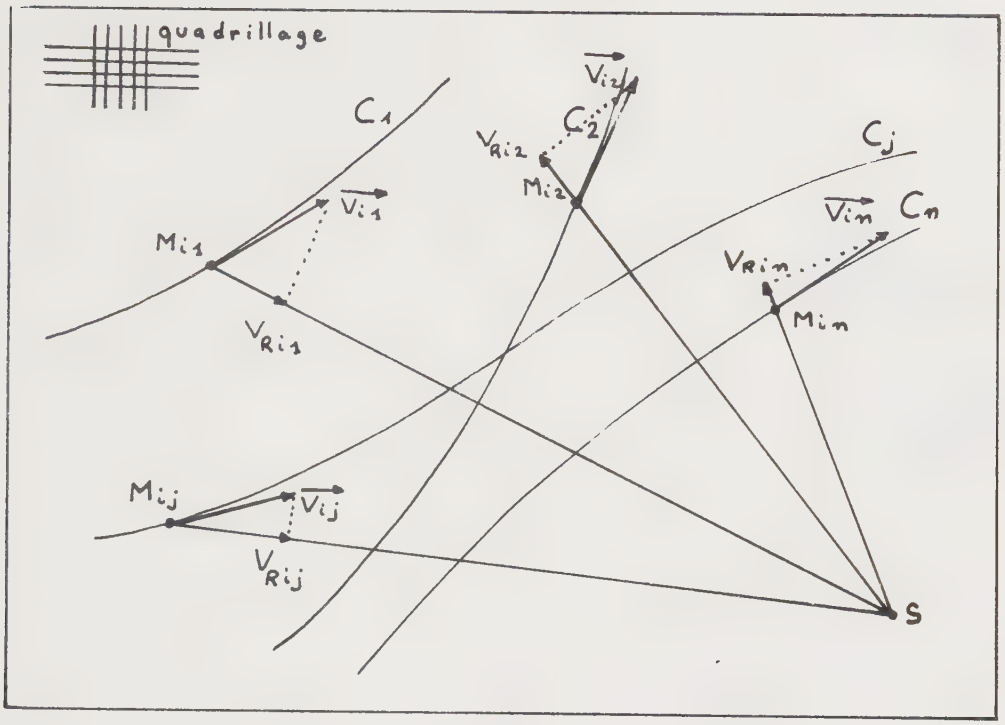


Fig 110

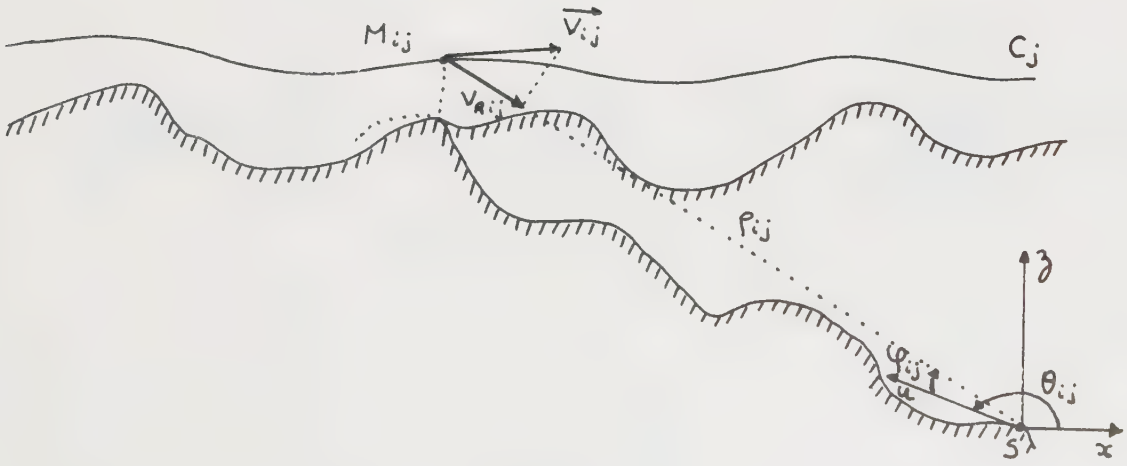


Fig 111

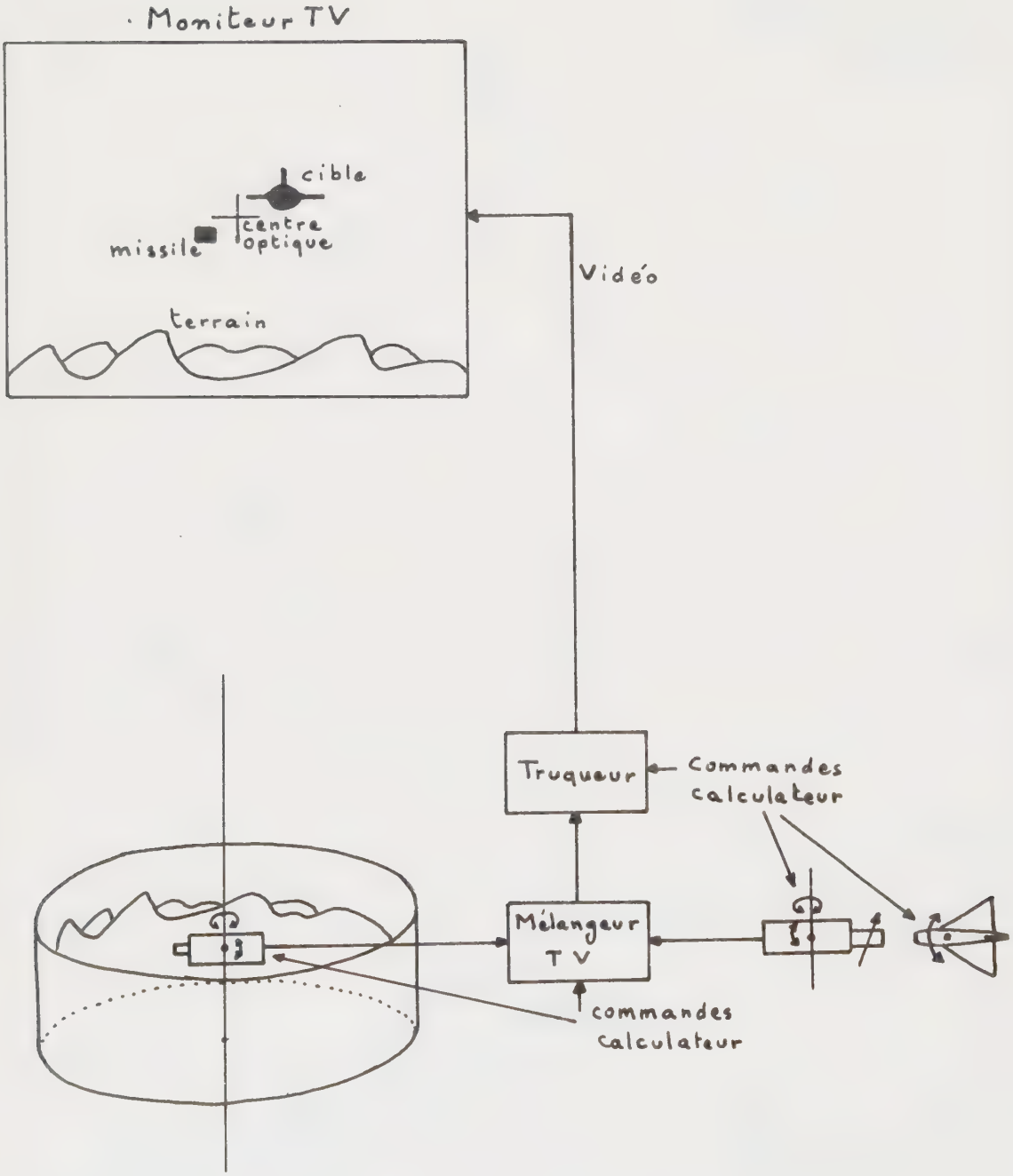

Moniteur TV
cible
centre optique
missile
terrain
Vidéo
Truqueur
Commandes calculateur
Mélangeur TV
commandes calculateur

Fig 112

VU :

Le Président de la Thèse

J. M E V E L

VU :

Le Directeur de Thèse

P.Y. A R Q U E S

VU ET APPROUVÉ

PERMIS D'IMPRIMER N° 59 A

RENNES, le 15 Janvier 1971

Le Professeur délégué,

D. P E L T I E R